LA GRANDEZZA DISCRETA ANALIZZATA NELLE SUE FINITE ED INFINITESIME...



LA GRANDEZZA DISCRETA

ANALIZZATA

NELLE SUE FINITE ED INFINITESIME FUNZIONI

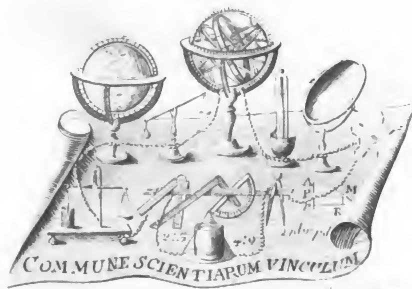
DAL

P. GENNARO MINZELE

DE' CHERICI REGOLARI DELLE SCUOLE PIE

PROFESSORE DE' REGJ STUDJ, E DELL' ACCADEMIA MILITARE.

TOMO II.



P. Minzele Invenit

NAPOLI

TIPOGRAFIA LARGO S. MARCELLINO N.° 2.

1826.



Apicem totius Eruditionis humanæ conscendimus Analysin tradituri.

WOLFIUS IN PRÆF. AD ELEM. ANALY.

SEZIONE III.

RAPPORTO DELLA GRANDEZZA DISCRETA.



LEZIONE XII.

La Grandezza discreta rapportata ad un' altra simile per la maniera di superarsi.

186. La voce *rapporto* ci sveglia o l' idea della uguaglianza tra le grandezze, o l'idea del come una supera l' altra, o finalmente come una contiene l' altra. Della prima si è parlato nella Sezione seconda: le due altre formeranno l'oggetto del vero rapporto in questa Sezione.

Il rapporto non si può formare, che fra due grandezze omogenee, considerate non secondo il loro essere specifico, ma secondo l' essere numerico di ciascuna.

187. Chiamo generalmente il rapporto di due grandezze omogenee *Ragione delle grandezze.* Due grandezze dunque compongono la ragione, delle quali la prima chiamo *Antecedente*, la seconda *Conseguente.* Or se la ragione di due grandezze riguarda la maniera di superare, la dico *Aritmetica*; se poi prende di mira il come una contiene l'altra, la chiamo *Geometrica*; e dico *Esponente* la grandezza, ch' esprime un tal rapporto sì nell' una, che nell' altra ragione; perchè mi espone il valore della ragione, il quale nella ragione aritmetica corrisponde alla *differenza* delle grandezze, nella ragion geometrica al *quoto*.
Così se riguardo di quanto il numero 8 supera il 5, cioè di 3, la ragione è aritmetica, nella quale 8 è l' *antecedente*,

5 il *conseguente*, e 3 la *differenza*, e si esprime 8: 5, e si legge *la ragione aritmetica di* 8 *a* 5. Se poi cerco per quanto l'8 contiene il 2, cioè per 4, la ragione è geometrica, e si scrive 8: 4, e si legge *la ragione geometrica di* 8 *a* 4.

188. Se l'esponente segna il valore della ragione (§.187), le ragioni di uguali esponenti saranno uguali; così 8: 5=7: 4 per le ragioni aritmetiche; ed 8: 2=12: 3 per le ragioni geometriche.

I. Or l'uguaglianza di due ragioni forma la *Proporzione*, o l'*Analogia*, la quale dirassi Aritmetica, o Geometrica, secondo la natura delle ragioni componenti. A formare perciò una proporzione si richieggono quattro termini.

II. Che se le ragioni uguali si combinano in modo, che il conseguente della prima ragione faccia da antecedente nell'altra, come $a : b = b : c$, allora la proporzione si denomina *continua*.

III. Finalmente indicandosi dall'esponente il valore della ragione, se questo valore assoluto si rende relativo, senza che cambi di valore, col riferirlo cioè all'unità, avremo la data ragione espressa in minimi termini per quella dell'esponente all'unità.

189. Comparisca in termini generali una proporzione aritmetica $a : b = c : e$, di cui ne sia d la differenza; a dunque supera b di d, o viceversa; dunque $a = b \pm d$, e $c = e \pm d$. Ora aggiungo agli uguali gli uguali (§.125), ed ho $a + e \pm d = c + b \pm d$, ed $a + e = c + b$. Dunque . . .

TEOR. LXIV. *Nella proporzione aritmetica la somma de' termini estremi pareggia quella de' termini medj* (a).

(a) Questo è il fondamentale teorema per le proporzioni aritmetiche. E dall'essere $a = b \pm d$, secondochè a è maggiore, o minore di b, sarà $b = a \mp d$; dunque ogni ragione aritmetica si può generalmente segnare per $a : a \mp d$, oppure $a : a \pm d$.

190. Ma se la proporzione è continua (§.188), come $a : b = b : c$, avremo $a+c=2b$ (§.189). Dunque ...

TEOR. LXV. *Nella proporzione continua aritmetica la somma de' termini estremi pareggia il doppio del termine medio.*

191. Ridotte così le analogie aritmetiche ad equazioni (§.189.190), si può valutare un termine incognito, se ne hanno, dati gli altri, con maneggiarle come equazioni (§.127). Di fatto

I. Sia $a : b = c : x$, sarà (§.189) $a+x=b+c$, ed (§.127) $x=b+c-a$.

II. Sia $a : b = x : c$, sarà (§.189) $a+c=b+x$, ed (§.127) $x=a+c-b$.

III. Sia $a : b = b : x$, sarà (§.190) $a+x = 2b$, ed (§.127) $x=2b-a$.

IV. Sia $a : x = x : c$, sarà (§.190) $a+c=2x$, ed (§.127) $x = \frac{a+c}{2}$.

LEZIONE XIII.

La Grandezza discreta rapportata ad un' altra simile per la maniera di contenersi.

192. Comparisca una proporzione geometrica sotto la forma $a : b = c : d$, e ne sia e l' esponente. Or contenendosi b in a un numero e di volte, sarà $a=eb$; come $c=ed$; e moltiplicando gli uguali per gli uguali (§.125), avrò $aed=ebc$, ossia $ad=bc$ (a). Dunque . . . . .

(a) Quì si è supposto $a > b$, ma se $a < b$, si ha la stessa verità. Di fatto se fosse $a < b$, sarebbe $\frac{a}{b}=e, \frac{c}{d}=e$; ma $e=e$; dunque $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, ossia $ad=bc$. Dunque il teorema è generale.

TEOR. LXVI. *In ogni proporzione geometrica il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medj.*

193. Ma se la proporzione è continua (§.188), come $a : b = b : c$, sarà $ac = b^2$. Dunque . . . . . .

TEOR. LXVII. *In qualunque proporzione geometrica continua il prodotto de' termini estremi pareggia la seconda potenza del termine medio.*

194. La riduzione delle grandezze proporzionali ad equazione è un principio molto esteso nella soluzione de' problemi (*a*), potendosi così facilmente valutare un termine incognito, che abbia una data analogia. Di fatto . . .

I. Sia $a : b = c : x$, sarà (§.192) $ax = bc$ (§.127) $x = \frac{bc}{a}$.

II. Sia $a : b = x : c$, sarà (§.192) $bx = ac$ (§.127) $x = \frac{ac}{b}$.

III. Sia $a : b = b : x$, sarà (§.193) $ax = b^2$ (§.127) $x = \frac{b^2}{a}$.

IV. Sia $a : x = x : b$, sarà (§.193) $x^2 = ab$ (§.127) $x = \sqrt{ab}$.

195. Nel §. 192 dall'analogia $a : b = c : d$ siamo calati alla equazione $ad = bc$. Potremo quindi da questa risalire alla primaria analogia, con fare a primo fattore del primo prodotto al primo fattore b del secondo pro-

(*a*) Per isciogliere un problema bisogna ridurlo ad equazione, ma non tutti i problemi ci si propongono con equazioni. Di fatto se alla dimanda: *Che ora è?* Uno rispondesse: *Le ore scorse dalla mezza notte fino a questo punto sono alle ore, che da questo punto ci vogliono per mezzo giorno* $= 2 : 3$, costui ha fissata l'ora, ma noi la sapremo dopo la soluzione di un problema. Ma dov'è l'equazione? Si ha il problema enunciato con un'analogia; dunque si riduca ad equazione, e si avrà l'intento. Di fatto essendo le ore scorse $= x$, sarà $12 - x$ il residuo sino a mezzo giorno; dunque $x : 12 - x = 2 : 3$ (§.192), $3x = 24 - 2x$, ed $x = \frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5}$.

dotto, come c secondo fattore del secondo prodotto al secondo fattore d del primo prodotto. Ma le grandezze algebriche non hanno valore locale (§.20). Dunque . . .

TEOR. LXVIII. *Due prodotti aguali si sciolgono in analogia, con fare il fattore di un prodotto al fattore dell'altro, come l'altro fattore di questo al rimanente fattore del primo prodotto* (a).

196. Sarà dunque un carattere decisivo per l'ugualianza di due prodotti, qualora i loro fattori si possono sciogliere in analogia (§.195), e per l'analogia sarà un carattere di essere stata ben istituita, qualora il prodotto degli estremi pareggia quello de'medj (§.192). Su tal principio potrò sciogliere in analogia l'equazione $ad=bc$ (§.195), ed in tanti modi, per quante combinazioni mi danno i termini, differenti tutti dalla primaria data $a:b=c:d$, ma che da questa si ricavano. Or quì segno due analogie principali, potendosi le altre a queste ridurre.

197. L'analogia $a:b=c:d$ mi dà (§.192) $ad=bc$. Sciolgo questa equazione in analogia (§.195), e faccio $a:c=b:d$, ed i termini sono anche proporzionali (§.196); ma questa si può ricavare dalla data, *alternando i termini*. Dunque, . . .

(a) Questo teorema con quello del §. 192 sono i fondamentali per la teoria delle proporzioni geometriche, maneggiandosi con essi tutte le verità di tal genere. Tutto il trattato delle proporzioni geometriche potrebbe quì terminare; giacchè i due stabiliti teoremi esauriscono tutto ciò, che a lungo hanno scritto gli autori su questa materia. Quì sarebbe stata mia idea di terminarlo; e questo avrebbe richiesto l'ordine che mi ho prefisso. Ma perchè vi sono delle molte verità, che servono alla Geometria, ed alla Fisica, perciò ho determinato porle ne' seguenti paragrafi, a fine di non ricercarle ne' luoghi non proprj, e per maggior facilità mi servo sempre della solita analogia $a:b=c:d$, e della di lei equazione $ad=bc$ nella ricognizione de' termini.

TEOR. LXIX. *In una data analogia sarà* alternando *l'antecedente all'antecedente, come il conseguente al conseguente.*

198. Quì cade in acconcio riflettere, che potendosi una grandezza di qualunque specie esprimere con numeri relativi ad un' arbitraria unità, presa nella rispettiva specie; se questi numeri si sostituiscono alle grandezze in una proporzione, si avranno della stessa specie i quattro termini, che la compongono. Così preparate alcune analogie, si possono su di esse fare certe operazioni necessarie, come sono l' *alternazione*, *ed il prodotto delle grandezze eterogenee.* Di fatto se ho uno spazio S doppio di un altro s, ed un tempo T doppio di un altro t, facendo $S : s = T : t$, queste grandezze non esprimono l' essere dello spazio o del tempo assolutamente come tale, ma l'essere di uno spazio doppio dell' altro, e di un tempo doppio dell' altro (*a*).

199. Che se poi sciolgo $ad = bc$ in analogia, facendo $b : a = d : c$, i termini sono proporzionali (§. 192): ma

---

(*a*) Il Signor d' Alembert *Dynamique* nota num. 14. così fa intendere questa rilevante verità. Essendo lo spazio, ed il tempo di diversa natura, ben si vede, che non si può dividere lo spazio pel tempo. Quindi il dire, che le velocità sono come gli spazj divisi pei tempi, egli è un dire, che le velocità sono come i rapporti degli spazj ad un' istessa comune misura, divisi pei rapporti de' tempi ad un' altra comune misura, cioè che se si prende, a cagion di esempio, il piede per la misura degli spazj, ed il minuto per la misura de' tempi, le velocità di due corpi, che si muovono uniformemente, sono tra loro, come i *numeri* de' piedi scorsi da ciascuno, divisi pei *numeri* de'minuti da ciascuno impiegati a scorrerli, e non come i *piedi* divisi pei *minuti*. Ed a dirlo più breve colle parole di cui egli si serve nel discorso preliminare: dividere gli spazj pei tempi, per avere il rapporto delle velocità di due corpi, altro non significa, che trovare la ragione, che hanno le parti dello spazio alla sua unità, alla ragione delle parti del tempo alla sua unità.

questa verità si può dedurre dall'analogia data (§.192) colla semplice *inversione* de' termini. Dunque . . . .

TEOR. LXX. *In una data analogia sarà invertendo il conseguente di una ragione al suo antecedente, come il conseguente dell' altra al suo antecedente.*

200. Aggiungo bd, prodotto de'conseguenti, a'termini della equazione $ad=bc$ (§.192), ed ho $(a+b)\,d=(c+d)\,b$; e perciò (§.195) $a+b:b=c+d:d$, che chiamo *componendo*, e fatta la ricognizione de' termini, avrò che . . .

TEOR. LXXI. *In qualunque proporzione geometrica sarà* componendo *l'antecedente più il conseguente al conseguente di una ragione, come l' antecedente più il conseguente al conseguente dell'altra.*

201. In vece di aggiungere bd, la tolgo da' termini della equazione $ad=bc$, ed ho $a-b:b=c-d:d$, che a differenza della prima chiamo *dividendo*. Dunque . . .

TEOR. LXXII. *In una proporzione geometrica sarà* dividendo *l' antecedente meno il conseguente al conseguente in una ragione, come l' antecedente meno il conseguente al conseguente nell' altra.*

201. Ora se aggiungo, o tolgo dalla equazione $ad=bc$ la grandezza ac, prodotto degli antecedenti dell' analogia $a:b=c:d$, avrò . . .

I. Colla somma $a+b:a=c+d:c$, operazione, che chiamo *composizione conversa.*

II. Colla sottrazione $a-b:a=c-d:c$, che dico *divisione conversa.*

III. Ed invertendo (§.199) queste due analogie, avrò $a:a+b=c:c+d$, ed $a:a-b=c:c-d$, delle quali la prima chiamo *composizione in contrario*, la seconda *divisione in contrario*, o *conversione di ragione* (a).

(a) Il Wallis T. II. Algeb. Cap. XIX. così esprime tutt' i modi di variare un' analogia: Se un antecedente sta al suo conseguente, come l'altro antecedente al suo conseguente, sarà la som-

203. Nelle due ragioni collo stesso conseguente $a: b$, $c: b$ sia m l'esponente della prima, ed n quello della seconda; sarà $a=mb$, $c=nb$, ed $anb=cmb$, ossia $an=cm$, ed (§.195) $m: n=a: c$; ma $m: n$ è la ragione del valore delle ragioni date (§.187), ed $a: c$ è la ragione degli antecedenti. Dunque . . .

TEOR. LXXIII. *Due ragioni, che hanno lo stesso conseguente, sono come gli antecedenti.*

204. Sieno due ragioni $a: b$, $c: d$ espressa da $a=mb$, e da $c=nd$ (§.192); sarà $ac=mbnd$, ed (§.195) $ac: bd=mn: 1$; ma $mn: 1$ è la ragione del prodotto degli esponenti delle ragioni date all' unità; e perciò (§.188.III) il valore di una ragione moltiplicata per l'altra, che chiamo *ragion composta*; dunque anche $ac: bd$ (§.188.I) esprimerà la *ragion composta* delle date $a: b$, $c: d$, e fatta la ricognizione de' termini, anche componendosi più ragioni, avrò che . . .

TEOR. LXXIV. *Se di due o più ragioni date si moltiplicano gli antecedenti, e si rapportano al prodotto de' conseguenti, si avrà la* ragion composta *delle ragioni date* (a).

ma, o differenza degli antecedenti alla somma, o differenza de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente; e così alternando, ed invertendo. Parimente sarà la somma degli antecedenti alla differenza di essi, come la somma de' conseguenti alla loro differenza, e ciò anche alternando, ed invertendo.

(*a*) Evvi un metodo, per comporre ragioni, di molto comodo pel calcolo, e di un uso troppo esteso nella Geometria, ed è il seguente.

I. Volendo comporre $a: b$ con $c: d$, si faccia $a: b=d: \frac{bd}{a}=m$, e $c: m$ sarà la ragion composta data. Che se poi si debbono comporre $a: b$, $c: d$, $e: f$, avrò per le due prime $c: m$. Compongo quindi nella stessa guisa le due ragioni di $c: m$, e di $e: f$, ed avrò la ragion composta delle date.

II. Or se nel fare la ragion composta delle date $a: b$, $c: d$, $e: f$, $g: h$, si vuole, che a sia antecedente della composta, si

205. Quindi se i termini della ragion composta di $ac : bd$ si dividono pei rispettivi termini di una ragion componente, cioè per un suo fattore, darà l'altro fattore al quoto. Dunque . . . .

TEOR. LXXV. *Se l'antecedente di una ragione si divide per l'antecedente di un' altra, ed il quoto si rapporta al conseguente della prima ragione diviso per lo conseguente della seconda, si avrà il quoto delle date ragioni, ossia la* ragion divisa.

206. Sieno $a : b = c : d$, $b : f = d : g$; sarà (§.197) per la prima $a : c = b : d$, e per la seconda $b : d = f : g$; ma $b : d = b : d$; dunque $a : c = f : g$, ed (§.197) $a : f = c : g$, che chiamo *ragion ordinata delle date*. Dunque . . . .

TEOR. LXXVI. *Se in due analogie i conseguenti di una sono antecedenti dell'altra*, per ragion ordinata *gli antecedenti della prima analogia si potranno sostituire agli antecedenti della seconda.*

207. Sieno $a : b = c : d$, $a : f = c : g$; sarà (§.197) $a : c = b : d$, $a : c = f : g$; dunque $b : d = f : g$, e (§.197) $b : f = d : g$, che chiamo anche *ragion ordinata*. Dunque . . .

TEOR. LXXVII. *Se in due analogie gli antecedenti dell' una sono antecedenti dell' altra*, per ragion ordinata *i conseguenti della prima si potranno sostituire agli antecedenti della seconda.*

208. Sieno $a : b = c : d$, $b : f = g : c$; sarà per la prima (§.192) $ad = bc$, e per la seconda $bc = fg$; dunque $ad = fg$, e perciò (§.195) $a : f = g : d$:, chiamo *ragion perturbata* delle date. Dunque . . . .

---

faccia in tal caso caso $c : d = b : \frac{bd}{c} = m$, $e : f = m : \frac{fm}{e} = n$, $g : h = n : \frac{nh}{g} = p$, e sarà $a : p$ la ragion composta di dato antecedente.

III. Se poi si vuole b per conseguente della ragion composta, si faccia $d : c = a : \frac{ac}{d} = m$, $f : e = m : \frac{em}{f} = n$, $b : g = n : \frac{gn}{b} = p$, e la ragione di $p : b$ esprimerà ciò che si cerca.

le ragioni $a : b$, $b : c$, $c : d$, $d : e$, $e : f$, $f : g$, ed avrò (§.204) $abcdef : bcdefg = a : g$. Dunque ....

TEOR. LXXXII. *Se fra due grandezze omogenee date s' introducono quante se ne vogliano altre omogenee, sarà la ragion composta da tutte, come quella delle due date.*

213. Ora supponendo $a : b = b : c$, avrò tra a, e c inserito b; dunque (§.212) $a : c = (a : b)(b : c) = (a : b)(a : b) = (b : c)(b : c) = a^2 : b^2 = b^2 : c^2$; e chiamando la ragion de' quadrati *ragione duplicata*, avrò che . . .

TEOR. LXXXIII. *Se tre grandezze sono in continua proporzione, sarà la prima alla terza nella ragion* duplicata *della prima alla seconda, o della seconda alla terza.*

214. Quindi se fosse un numero n di grandezze in continua proporzione, si troverebbe collo stesso raziocinio la prima all'ultima, come la potenza $n-1$ della prima alla potenza $n-1$ della seconda, o di questa alla terza ecc.

215. Essendo $a : b = c : d$, sarà $ad = bc$, ed (§.125) $a^m d^m = b^m c^m$; dunque (§.195) $a^m : b^m = c^m : d^m$. Dunque...

TEOR. LXXXIV. *Se quattro grandezze sono proporzionali, anche l'eguali potenze di esse sono in proporzione; e viceversa, se quattro potenze sono proporzionali, le radici saranno anche in proporzione fra loro.*

216. Si è stabilita nel §.211 l'analogia di $a : b = ad : bd$; così sarà un'altra di $c : d = bc : bd$, le quali, perchè hanno lo stesso conseguente, esprimo così $\left.\begin{matrix} ad \\ bc \end{matrix}\right\} : bd$, ed essendo il loro valore, come quello degli antecedenti (§.203), è un valore assoluto; che perciò le ragioni così ridotte sono suscettibili di accrescimento, e diminuzione, qualora tali operazioni cadono su gli antecedenti, e poi si riportano al comune conseguente, affinchè il valore assoluto degli antecedenti si riduca a relativo. Ed $\left.\begin{matrix} ad \\ bc \end{matrix}\right\} : bd$

sarà la formola generale per l'algoritmo delle ragioni geometriche. Veniamo al fatto.

217. Riprendo la formola (§.216) $\left.\begin{matrix} ad \\ bc \end{matrix}\right\} : bd.$

I. Questa espressione è la stessa, che $ad \pm bc : bd$.

II. Essendo $ad \pm bc : bd$, sarà (§.211) $\frac{ad}{b} \pm c : d$.

III. E dividendo $ad \pm bc : bd$ per d, sarà $a \pm \frac{bc}{d} : b$.

IV. E dividendo per bd, sarà $\frac{ad \pm bc}{bd} : 1$.

Son queste quattro diverse maniere, per sommare, ò sottrarre le ragioni geometriche.

218. Considero la formola (§.216) $\left.\begin{matrix} ad \\ bc \end{matrix}\right\} : bd$ sotto l'aspetto di $\begin{matrix} ad : bd \\ bc : bd \end{matrix}$ e perciò (§.204) . . . .

I. Sarà $adbc : b^2d^2$, e perciò (§.211) $ac : bd$ ragion composta delle ragioni date $a : b$, $c : d$ (§.204).

II. Essendo $ac : bd$, sarà (§.211) $\frac{ac}{b} : d$.

III. E dividendo per d in vece di b, avrò $\frac{ac}{d} : b$.

IV. E finalmente dividendo per bd, avrò $\frac{ac}{bd} : 1$.

Ed ecco quattro diverse maniere, per evere il prodotto di due ragioni date, ossia la ragion composta di esse.

219. Sciolta la formola del §. 216 nelle due componenti ragioni $\begin{matrix} ad : bd \\ bc : bd \end{matrix}$, avrò (205) . . . .

I. $\frac{ad}{bc} : \frac{bd}{bd} = \frac{ad}{bc} : 1$.

II. Essendo $\frac{ad}{bc} : 1$, sarà (§.211) $\frac{ad}{bc} : 1 = ad : bc$.

III. E (§.211) $\frac{ad}{bc} : 1 = \frac{ad}{b} : c$.

IV. E finalmente (§.211) $\frac{ad}{bc} : 1 = \frac{ad}{c} : b$.

Queste sono quattro diverse maniere, per dividere le ragioni. Ed ecco ridotto tutto l' algoritmo delle ragioni geometriche colle sue diverse specie ad una formola generale $\left.\begin{matrix} ad \\ bc \end{matrix}\right\} : bd$.

LEZIONE XIV.

Unione de' due antecedenti rapporti della Grandezza.

220. La combinazione del rapporto geometrico, ed aritmetico forma un terzo rapporto alle grandezze. Sia di fatto aritmeticamente $a : b = b : c$, sarà (§.189) $a + c = 2b$, ed $(a+c) \times abc = 2b \times abc$, ossia $a^2 bc + abc^2 = ab^2c + ab^2c$, ed $a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2$, ossia $ab\ (ac - bc) = bc\ (ab - ac)$, ed (§.195) $ab : bc = ab - ac : ac - bc$. Or questa geometrica proporzione nata dalla proporzione aritmetica è ciò, che dicesi *Proporzione Musica*, perchè di tal combinazione si serve la musica nelle sue consonanze.

221. Se quattro grandezze a, b, c, d sono talmente disposte, che la prima stia alla quarta geometricamente, come la differenza della seconda dalla prima alla differenza della quarta dalla terza, cioè $a : d = a - b : c - d$, le quattro grandezze diconsi in *proporzione armonica*.

222. È facile ora co' soliti metodi (§. 193. 127) valutare ciascun termine in questa proporzione. Di fatto essendo $a : d = a - b : c - d$, sarà $ac - ad = ad - bd$, equazione, dalla quale ricavo i seguenti quattro valori.

I. $a=\frac{bd}{2d-c}$.

II. $b=(2-\frac{c}{d})n$.

III. $c=(2-\frac{b}{a})d$.

IV. $d=\frac{ac}{2a-b}$.

223. Che se poi sono le tre grandezze a, b, c disposte in modo, che la prima stia alla terza geometricamente, come la prima meno la seconda alla seconda meno la terza, la proporzione dicesi *armonica continua*; e si avrà $a : c=a-b : b-c$; dunque $ab-ac=ac-bc$, e perciò . . . .

I. $a=\frac{bc}{2c-b}$.

II. $b=\frac{2ac}{a+c}$.

III. $c=\frac{ab}{2a-b}$.

224. Se poi le quattro grandezze a, b, c, d sono talmente disposte, che formino l'analogia del §. 221, ma colla prima ragione inversa, cioè $d : a=a-b : c-d$, si diranno esse *contro-armonicamente proporzionali*; ed essendo (§.192) $dc-d^2=a^2-ab$, si valuteranno nella stessa guisa i termini; e si avrà (§.127) . . . . .

I. $a=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(cd-d^2+\frac{1}{4}b^2)}$.

II. $b=\frac{d^2-dc}{a}+a$.

III. $c=\frac{a^2-ab}{d}+d$.

IV. $d=\frac{1}{2}e \pm \surd(ab-a^2+\frac{1}{4}c^2)$.

225. Se finalmente le tre grandezze del §. 223 invertono la prima ragione dell'analogia, e danno $c:a = a-b:b-c$, le dette tre grandezze sono in proporzione *controarmonica continua*; e formata l'equazione $bc-c^2 = a^2-ab$, si ha (§.127) ....

I. $a=\frac{1}{2}b \pm \surd(bc-c^2+\frac{1}{4}b^2)$.

II. $b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$.

III. $c=\frac{1}{2}b \pm \surd(ab-a^2+\frac{1}{4}b^2)$.

LEZIONE XV.

Rapporto continuato della Grandezza discreta riguardante la maniera di superarsi.

226. Il continuato rapporto delle grandezze, o una continua proporzione di esse chiamasi *Progressione*, la quale sarà *aritmetica*, se le ragioni componenti sono aritmetiche, e sarà *geometrica*, se vien formata da ragioni geometriche. Il segno della prima è ÷, quello della seconda ∺.

227. Nella progressione aritmetica dunque, ch'è una successione di ragioni uguali (§.226), se esprimo la prima ragione per $a:a\pm d$ (Nota §.189), avrò $a:a\pm d = a\pm d:x$, e perciò sarà $x=a\pm d+a\pm d-a=a\pm 2d$; così si trova il quarto termine $=a\pm 3d$; il quinto $=a\pm 4d$ ecc. Sarà perciò ÷ $a:a\pm d:a\pm 2d:a\pm 3d:a\pm 4d:......$ $a\pm(n-1)d$ una espressione generale per qualunque progressione aritmetica crescente, o decrescente. Dunque..

3

TEOR. LXXXV. *Nella progressione aritmetica ogni termine dopo il primo pareggia il termine, che lo precede, più o meno la differenza della ragione, secondo che la progressione cresce, o decresce.*

228. Dalla ispezione della formola conosco, che cinque sono i suoi elementi; la differenza cioè, che chiamo d; il primo termine p; l'ultimo termine u; il numero de' termini n; e la somma di essi, che dico s. Dunque tutta la dottrina delle progressioni aritmetiche si ha in un problema così enunciato: *Dati tre de' cinque elementi, che compongono una progressione aritmetica, valutare gli altri due.* Cinque sono dunque le formole, che debbo rintracciare.

229. A ciò eseguire, rifletto sulla formola generale (§.227), ed in essa vedo le differenze moltiplicate successivamente per una continua serie di numeri naturali, i quali nella propria sede pareggiano il numero de' termini meno 1, ossia $n-1$; dunque ciascun termine, fuori il primo, sarà espresso per $p+(n-1)d$; ma ogni termine della progressione può essere ultimo, e perciò $=u$; dunque...

I. $u=p\pm(n-1)d$.

II. $p=u\mp(n-1)d$.

III. $d=\frac{u-p}{(n-1)}$.

IV. $n=\frac{u-p+d}{d}$.

In una progressione aritmetica la somma degli estremi, ossia del primo ed ultimo termine è $=p+u$; ma di queste somme ve ne sono tante, per quanta è la metà del numero de' termini ossia $\frac{n}{2}$; dunque la somma totale è . .

V. $s=(p+u)\frac{n}{2}=(\frac{p+u}{2})n$.

230. In queste cinque espressioni, ove vedesi il doppio segno, si avverta . . .

I. Che il segno $+$ marca le progressioni crescenti, e 'l segno $-$ le decrescenti.

II. Che i risultati co' segni positivi indicano, che la progressione è crescente; quei che hanno i segni negativi, fan vedere, che la progressione è decrescente.

III. Che essendo composta ognuna di queste cinque formole da quattro diversi elementi, isolando questi in ciascuna di esse successivamente, ci daranno venti problemi, che si possono proporre sulle progressioni aritmetiche.

231. Analizzo la formola §.227, e vedo, che la differenza comincia dal secondo termine, e che questa ha per coefficiente sempre un numero aritmetico uguale al numero de' termini meno l' unità, ossia $= n-1$. Dunque . . . .

I. Nell' ultimo termine, che chiamo m^{esimo}, il coefficiente sarà $= m-1$.

II. L' ultimo termine dunque sarà espresso (§.229.1) da $u = p \pm (m-1)\, d$.

III. Quindi $u-p = \pm (m-1)\, d$. Ora marcando d la differenza costante della progressione, e segnando $m-1$ il numero delle ragioni, ossia le volte, che questa differenza entra nella data progressione, è chiaro, che $(m-1)d$ valuterà in uno tutte le differenze, che entrano nella data progressione; dunque *la somma delle differenze in una progressione aritmetica pareggia la differenza del primo dall' ultimo termine.*

IV. Siccome ogni termine, fuori l'ultimo, fa da antecedente nella progressione, ed ogni termine, fuori il primo, fa da conseguente; così è chiaro, che $s-u$ esprimerà la somma di tutti gli antecedenti, ed $s-p$ la somma di tutt' i conseguenti della progressione.

232. Dati due limiti a, b, volete fra questi inserirvi un numero n di medj proporzionali aritmetici? Di-

scorretela così: quì tutto consiste a determinare l'esponente della progressione; dunque suppongo compiuta la progressione colla interposizione de' termini n tra a, b; ed il numero de' termini sarà $n+a+b=n+2$ (a), ed il numero delle uguali ragioni, o delle uguali differenze dell'intera serie pareggerà il numero de' termini interposti più 1, ossia $n+1$, e la somma delle differenze sarà (§.231.111) $u-p=\pm(m-1)\,d$; e dividendo questa somma delle differenze per $n+1$, numero delle differenze delle serie, avrò $\frac{u-p}{n+1}=\frac{\pm(m-1)\,d}{n+1}$ esponente, o differenza della progressione cercata. Dunque . . . .

Sarà $\frac{u-p}{n+1}$ *una formola generale per l'interpolazione de' termini intermedj in una progressione aritmetica, dati il primo e l'ultimo termine.*

233. Vengo al fatto. Sostituisco alla formola i termini dati (§.232), ed ho $\frac{u-p}{n+1}=\frac{b-a}{n+1}$; dunque la progressione richista è (§.227) $a : a\pm\frac{b-a}{n+1} : a\pm2\times\frac{(b-a)}{n+1} : . . a\pm3\times\frac{(b-a)}{n+1} : a\pm4\times\frac{b-a}{n+1} : . . . . . \pm b$.

Or se il coefficiente del numeratore in un termine pareggiasse $n+1$, resterebbe quel termine$=a\pm b-a=\pm b$, e sarebbe l'ultimo termine della progressione. Dunque. *Cessa l'interpolazione de' termini in una progressione aritmetica, ove il coefficiente del numeratore pareggia il denominatore.*

(a) Essendo n il numero de' termini, a il primo, e perciò uno de' termini della progressione, b l'ultimo, e perciò un altro termine, sarà l'intero numero de' termini espresso da $n+1+1=n+2$.

LEZIONE XVI.

Rapporto continuato della Grandezza discreta riguardante la maniera di contenersi.

234. La continuazione di più ragioni Geometriche uguali(§.226)forma la *progressione geometrica*. Nella ragione geometrica a: b di esponente e, posto $a>b$, sarà $b=\frac{a}{e}$; ma se $a<b$, sarà $b=ae$. Volendo dunque far progredire queste ragioni, farò nel primo caso $a:\frac{a}{e}=\frac{a}{e}:x$, ed $x=\frac{a}{e^2}$; nella stessa guisa si trovano gli altri termini, ed avrò la serie $a:\frac{a}{e}:\frac{a}{e^2}:\frac{a}{e^3}:\frac{a}{e^4}$... ecc.$=$(§.37)$a:ae^{-1}:ae^{-2}:ae^{-3}:$ ae^{-4} ecc. E nel secondo caso avrò $a:ae=ae:x$, ed $x=ae^2$; e la progressione sarà $a:ae:ae^2:ae^3:ae^4$ ecc. Combino i due casi della progressione, ed avrò per essi $\div\div a:ae^{\pm1}:ae^{\pm2}:ae^{\pm3}:ae^{\pm4}$ ecc. espressione generale per qualunque progressione geometrica, nella quale il primo del doppio segno nell' esponente indica la progressione crescente, e 'l secondo la decrescente. Dunque . . .

TEOR. LXXXVI. *Nella progressione geometrica ogni termine dopo il primo pareggia il prodotto del termine antecedente nell'esponente della progressione*(*a*).

235. In queste progressioni cinque elementi ci concorrono; il primo termine, che chiamo p; l'ultimo u; il

(*a*) Questo teorema è generale tanto per la progressione crescente, nella quale l' esponente è un intero, quanto per la decrescente, il cui esponente è un fratto.

numero de' termini n; l' esponente e; e la somma s. Quindi cinque sono le formole, le quali si determinano subito, che sieno dati tre elementi di ogni progressione.

236. Potendo ogni termine della progressione essere ultimo, e vedendo, che l'esponente in ciascun termine è elevato alla potenza che indica il numero de' termini meno uno, sarà . . . .

I. $u = pe^{\pm n - 1}$.

II. $p = \frac{u}{e^{\pm n - 1}}$.

III. $e = \sqrt[\pm n - 1]{\frac{u}{p}}$.

IV. $\pm n = 1 + \frac{lu - lp}{le}$ (a).

Or siccome ogni termine, fuorchè l'ultimo, è antecedente nella progressione, ed ogni termine, fuori il primo, è conseguente; così la somma di tutti gli antecedenti sarà espressa da $s - u$, e quella di tutt' i conseguenti da $s - p$. Dunque (§. 210) sarà $s - u : s - p = a : ae^{\pm 1}$, ed (§. 192) $sae^{\pm 1} - uae^{\pm 1} = as - ap$; così (§. 127) $sae^{\pm 1} - as = uae^{\pm 1} - ap$, ed $s = \frac{uae^{\pm 1} - ap}{ae^{\pm 1} - a}$. Dunque . . .

V. $s = \frac{ue^{\pm 1} - p}{e^{\pm 1} - 1}$.

(a) Per valutare in questa formola l'esponente n della espressione, si è dovuto necessariamente ricorrere ai logaritmi: ma perchè l'ordine porta, che di questi se ne parli nella Lez. XIX, perciò per non fare vuoto in questo luogo, mi son contentato di dare il semplice valore di n, riserbandomi la dimostrazione di esso nel §. 305.

237. Quindi facilmente si deduce . . .

I. Del doppio segno esponenziale il primo si adopera per le progressioni crescenti, e 'l secondo per le decrescenti.

II. I risultati positivi indicano la progressione crescente, i negativi la decrescente.

III. Essendo ogni formola composta da quattro diversi elementi, colla sostituzione di ognuno di essi in ogni formola si combinano venti formole.

IV. Analizzando la formola del §. 234, osservo la potenza dell' esponente e in ogni termine essere $n-1$; dunque nell' ultimo termine m^{esimo} sarà $= m-1$.

V. Dunque il termine m^{esimo} di una progressione sarà $pe^{\pm m-1}$.

VI. Se nella formola del §. 234 è $a=1$, la progressione resta nelle potenze del suo esponente e.

238. Dati due limiti a, b, volete fra questi inserirvi un numero n di medj geometrici proporzionali? Discorretela così: ogni termine della progressione pareggia quello, che lo precede, moltiplicato per l'esponente della progressione istessa; dunque essendoci noto il primo termine, che fa da precedente al secondo, il tutto sta a valutare l'esponente. Or questo (§.236. III) è $= \sqrt[\pm n-1]{\frac{u}{p}}$; ma il numero de' termini della progressione n è $= n+a+b = n+1+1 = n+2$; dunque l' esponente $= \sqrt[\pm n+2-1]{\frac{u}{p}} = \ldots$ $\sqrt[\pm n+1]{\frac{u}{p}} = \sqrt[\pm n+1]{\frac{b}{a}}$ grandezze tutte note; che perciò sarà il secondo termine $a\sqrt[\pm n+1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[\pm n+1]{\frac{a^{\pm n+1}b}{a}} =$ (§. 31) .... $\sqrt[\pm n+1]{a^{\pm n}b}$; e così trovando gli altri termini, si avrà la

progressione intercalata tra a, b essere ....

$$\div\!\div\, a : \sqrt[\pm n+1]{a^{\pm n} b} : \sqrt[\pm n+1]{a^{\pm n-1} b^2} : \sqrt[\pm n+1]{a^{\pm n-2} b^3} : \sqrt[\pm n+1]{a^{\pm n-3} b^4} \ldots$$

..... $+\, b$. Formola generale per l'intercalazione de' medj proporzionali geometrici fra due date grandezze.

239. Ora se l'esponente di a è uguale a zero, si avrà $a^0 = 1$ (§.36), ed il termine radicale resta colla grandezza b; ma b è l'ultimo termine dato per ipotesi; dunque la formola cessa da se stessa di progredire, quando a^0.

LEZIONE XVII.

Successione della Grandezza discreta.

240. Qualunque unione di grandezze simili, delle quali scambievolmente le une succedono alle altre con un certo ordine, e con una comune costante legge, è ciò, che chiamo *Serie*.

Le serie, che nascono, e naturalmente si svolgono dalle grandezze algebriche ......

I. O sono quelle provenienti dalla evoluzione delle potenze algebriche di un binomio qualunque $(p+q)^m$ (§.79), o da un infinitinomio (§.81);

II. O dalla evoluzione di un radicale qualunque $\sqrt[m]{(a+b)^n} = (a+b)^{\frac{n}{m}}$ (§.93);

III. O finalmente dalla evoluzione di una frazione algebrica qualunque $\frac{a^2}{x \pm y} = a^2 (x \pm y)^{-1}$.

La prima deriva dal maneggio della formola $(p+q)^m$ (§.81), o dall' altra $(p+pq)^m$ (§.83); la seconda o nasce dalle formole del binomio, o da certi particolari metodi, che or ora svilupperemo; la terza finalmente dalla successiva divisione, o da altro elegante metodo, che fisseremo.

Evoluzione de' Radicali.

241. Per determinare altri metodi alla evoluzione de' radicali, suppongo la grandezza radicale a di esponente m, la sua radice prossima r, e p la parte sconosciuta, che aggiunta ad r mi dà l' esatta radice. Tutto il metodo dunque consiste in valutare p. Sarà perciò $a=(r+p)^m=r^m+mr^{m-1}p+m\times(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}\,p^2$. Trascuro gli altri termini, perchè maggiori di p^2 quadrato della parte sconosciuta, ed avrò $a-r^m=mr^{m-1}\,p+m\,(\frac{m-1}{2})r^{m-2}\,p^2=B$: divido l'equazione per mr^{m-1}, ed avrò quindi $\frac{B}{mr^{m-1}}=p+\frac{(m-1)p^2}{2\,r}$. Dunque $\frac{B}{mr^{m-1}}>p$ per la picciolissima frazione $(\frac{m-1}{2\,r})p^2$. Divido di bel nuovo la stessa equazione per $mr^{m-1}+m\,(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}\,p$, ed avrò $\frac{B}{mr^{m-1}+m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}p}=$

$$\frac{mr^{m-1}p+m(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}p^2}{mr^{m-1}+m\,(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}p}=\frac{mr^{m-1}+m(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}\,p}{mr^{m-1}+m(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}\,p}\,p=p.$$

Sostituisco nel denominatore di B in vece di p il di lei valore, deficiente di un picciolissimo disprezzabile rotto, ed ho $p=\frac{B}{mr^{m-1}+m(\frac{m-1}{2})\,r^{m-2}\times\frac{B}{mr^{m-1}}}=\frac{B}{mr^{m-1}+(\frac{m-1}{2\,r})\,B}=$ $\frac{B\times r}{mr^m+\frac{m-1}{2}B}$, valore da aggiungersi ad r, per aversi l' esatta radice di a, ch' è il primo metodo.

242. Divido l'equazione (§241) $mr^{m-1}p+m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}p^2$ $=B$ per $m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}$ coefficiente di p^2, ed ho ....

$$\frac{B}{m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}}=\frac{mr^{m-1}p}{m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}}+\frac{m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}p^2}{m(\frac{m-1}{2})r^{m-2}}=\frac{2rp}{m-1}+p^2;$$

e compiendo il quadrato, avrò (§.137) $p^2+\frac{2rp}{m-1}+\frac{r^2}{(m-1)^2}=$ $\frac{2B}{m(m-1)r^{m-2}}+\frac{r^2}{(m-1)^2}$, e quindi sarà $p=-\frac{r}{m-1}\pm$ . . . $\sqrt{}(\frac{1}{(m-1)^2}r^2+\frac{2}{m-1}\times\frac{B}{mr^{m-2}})$, valore da aggiungersi ad r, per aversi l'esatta espressione di a, ch'è il secondo metodo.

243. Se dalla espressione $\sqrt{}(a^2\pm x^2)$ vado col solito metodo estraendo la radice (§.93), avrò l'evoluzione di $\sqrt{}(a^2\pm x^2)=a\pm\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}\ldots\ldots\infty$, che sarebbe il terzo metodo per la evoluzione de' radicali.

Evoluzione delle Frazioni Algebriche.

244. Per isvolgere in serie la frazione algebrica $\frac{a^2}{x\pm y}$, metto in opera l'ordinaria divisione. Divido a^2 per $x\pm y$, ed ho $\frac{a^2}{x}$ (§.33), primo termine della serie, e per residuo $\mp\frac{a^2y}{x}$; divido questo per $x\pm y$, ed ho per secondo termine della serie $\mp\frac{a^2y}{x^2}$, e così proce-

dendo, ho i termini della serie $\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 y}{x^2} + \frac{a^2 y^2}{x^3} \mp \ldots$ $\frac{a^2 y^3}{x^4} + \ldots$ ecc. $= A$.

245. Or se nella serie trovata (§.244) fosse $y < x$, cosicchè $\frac{y}{x}$ fosse una frazione propria (§.38), trovandosi nel denominatore della serie le x colle loro potenze elevate sempre ad un grado di più, che non sono le y nel numeratore, avremmo i termini seguenti successivamente minori de'precedenti; e perciò la serie, perchè diminuisce ne' suoi successivi termini, sarà *convergente*.
Di fatto si vede ciò chiaramente, sciogliendo la serie (§.244) ne'suoi fattori $(\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 y}{x^2})(1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4} + \frac{y^6}{x^6} + \ldots$ ecc. $)$
Per una contraria ragione è chiaro, che se $y > x$, la serie sarà *divergente*. Se finalmente $y = x$, si avrà la serie *equivalente* alla data frazione. In questo ultimo caso bisogna mutare la forma al denominatore, per non avere delle serie *illusorie*, o *false*.

246. Essendo $\frac{a^2}{x \pm y} = a^2 (x \pm y)^{-1}$, e svolgendo colla formola (§.81) il binomio $(x \pm y)^{-1}$, e moltiplicando ogni termine per a^2, si avrà anche con un tal metodo la stessa serie del §. 244.

247. Mi propongo a svolgere in serie la frazione $\frac{a}{b+mx}$. Suppongo $\frac{a}{b+mx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ ecc.; e liberando dal denominatore l'equazione, avrò .....
$$a = Ab + Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 + \ldots \infty.$$
$$Amx + Bmx^2 + Cmx^3 + \ldots \infty$$
Ora affinchè abbia luogo questa equazione, bisogna, che posto il primo

termine Ab uguale ad a, tutti gli altri termini del secondo membro restino uguali allo zero. Per ottenere ciò, bisogna paragonare allo zero i coefficienti delle potenze di x, e si avrà $a=Ab$, ed $A=\frac{a}{b}$; $Bb+Am=0$, e $B=-\frac{Am}{b}=-\frac{am}{b^2}$, $Cb=-Bm=+\frac{am^2}{b^2}$, e $C=\frac{am^2}{b^3}$ . . . . . Così dopo le soluzioni di primo grado, fatte le solite sostituzioni, saranno determinati i coefficienti cercati; quindi avrò $\frac{a}{b+mx}=\frac{a}{b}-\frac{am}{b^2}x+\frac{am^2}{b^3}x^2-\frac{am^3}{b^4}x^3 \ldots + \text{ecc.} = \frac{a}{b}\left(1-\frac{m}{b}x+\frac{m^2}{b^2}x^2-\frac{m^3}{b^3}x^3+\ldots \text{ecc.}\right)$ (a).

Evoluzione delle Frazioni Continue.

248. Chiamo *Frazione Continua* quella, il cui denominatore viene successivamente formato sempre, e poi sempre da un intero unito ad un fratto; ossia che questa affezione vada all' infinito, o si faccia fermare ad un dato termine. Si suole a tali frazioni aggiungere una grandezza qualunque a, e l' espressione generale di esse è . . .

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots \text{ecc.}}}}}}$$

(a) Questo è il metodo de' *coefficienti indeterminati* di tanto uso nelle Matematiche. Un tal metodo si applica non solo alla formazione delle potenze di un binomio, o di un infiniti-

Problema Diretto.

249. Il Problema diretto consiste in *determinare la serie corrispondente ad una data frazione continua.* Per iscovrire la legge della serie, sciolgo la espressione (§.248) ne' suoi termini, ed avrò . . .

$$a \qquad a+\frac{1}{b} \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} \qquad a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$$

ossia $a=\frac{a}{1}$; $a+\frac{1}{b}=\frac{ab+1}{b}$; $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}=\frac{abc+a+c}{bc+1}=$

$\frac{(ab+1)c+a}{b\times c+1}$; $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}=\ldots$

$\frac{(abc+a+c)d+ab+1}{(bc+1)d+b}$ ecc. Dunque . . .

TEOR. LXXXVII. *Ciascun termine della serie nata dalla evoluzione di una frazione continua, nella quale i numeratori sieno l' unità, pareggia nel numeratore il numeratore del termine ultimo, moltiplicato per una nuova grandezza, più il semplice numeratore penultimo; e nel denominatore pareggia similmente il denominatore del termine ultimo, moltiplicato per la stessa*

---

nomio, ma ben anche alla estrazione delle radici. Di fatto sia $\sqrt{(a^2-b^2)}=A+Bb^2+Cb^4+Db^6+\ldots$ ecc.; quadrando, e paragonando i termini omologhi, si ha $\sqrt{(a^2-b^2)}=a-\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}-$ ecc. Vedi Eulero Introduzione ecc. T.I. Cap. IV.

nuova grandezza, che ha moltiplicata il numeratore, più il semplice denominatore del termine penultimo.

250. I numeratori della frazione continua possono essere o unità (§.248), o grandezze qualunque. Comparisca perciò la frazione continua espressa da . . . ,

$$a+\cfrac{M}{b+\cfrac{N}{c+\cfrac{P}{d+\cfrac{Q}{e+\text{ ecc.}}}}}$$

ed avrò, come sopra, $a=\frac{a}{1}$; $a+\frac{M}{b}=\frac{ab+M}{b}$; $a+\cfrac{M}{b+\cfrac{N}{c}}=$

$\frac{abc+Na+Mc}{bc+N}=\frac{(ab+M)\,c+a\times N}{b\times c+1\times N}$; $a+\cfrac{M}{b+\cfrac{N}{c+\cfrac{P}{d}}}=\ldots$

$\frac{abcd+adN+Mcd+abP+MP}{bcd+Nd+Pb}=\frac{(abc+aN+Mc)\,d+(ab+M)\,P}{(bc+N)d+b\times P}$

ecc. . . . . ecc. . . . . ecc.

ch' è la legge, colla quale procedono i termini della serie, nel caso che i numeratori sieno numeri qualunque.

251. Non così facilmente però comparisce la legge, colla quale progrediscono i termini della serie, con cui si esprime il valore di una frazione continua, della quale i numeratori non sieno unità. Per iscovrire una tal legge, scrivo la serie trovata (§.250), e metto per primo termine di essa la grandezza $\frac{1}{0}$, la quale quantunque non nasca dalla frazione continua, pure mi si permetta di assumerla, affinchè possa formare il secondo termine della serie, e rendere così più chiara la legge del suo cammino. Al di sopra di ciascun termine situo

successivamente a, b, c, d, ecc., che chiamo *indici superiori*, e sotto gl' indici segno le M, N, P, Q, ecc., che dico *indici inferiori* presi dalla frazione continua data, ed avrò . . . .

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+M}{b}, & \frac{(ab+M)c+a\times N}{b\times c+1\times N}, & \frac{(abc+aN+Mc)d+(ab+M)P}{(bc+N)d+b\times P} & \\ M & N & P & Q & R & \end{array}$$

Ecco pronta la legge espressa nel seguente . . . .

TEOR. LXXXVIII. *Di una serie esprimente il valore di una data frazione continua, i cui numeratori non sieno unità, ogni termine, posto il primo* $\frac{1}{0}$, *e 'l secondo* $\frac{a}{1}$, *pareggia nel numeratore la somma de' prodotti del numeratore del termine antecedente, o ultimo nel suo indice superiore, e del numeratore del termine penultimo nel suo indice inferiore; e nel denominatore pareggia la somma de' prodotti formati dal denominatore del termine antecedente nell' indice scritto di sopra, e dal denominatore del penultimo nell' indice scritto di sotto* (a).

252. Or se queste frazioni si continuano sino a che si esauriscono gl' indici della frazione continua, allora l' ultima frazione segnerà il giusto valore della frazione continua. Dunque delle frazioni antecedenti l' ultima da-

---

(a) Collo stesso artificio, col quale si è scoverto questo teorema, si può anche scovrire quello del §.249, con preparare la serie nella seguente maniera . . . .

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+a+c}{bc+1}, \text{ ecc.} \end{array}$$

rà sempre un valore approssimante. Ora per considerare l' approssimazione al vero valore della frazione continua, mi metto a valutare le differenze delle frazioni ritrovate. Suppongo perciò il valore vero della serie $= x$, ed è chiaro dalla volgar teoria delle frazioni, che .... $\frac{1}{0} > x$, $\frac{a}{1} < x$, $a + \frac{M}{b} > x$, e così alternativamente un termine maggiore, e l' altro minore di x. Lascio il termine $\frac{1}{0}$, perchè (§.251) assunto, e non dedotto dalla frazione continua: e valutando la differenza tra la seconda, e terza frazione, la trovo $= \frac{M}{b}$; la differenza della quarta dalla terza è $= \frac{MN}{b(bc+N)}$; quella della quarta dalla quinta $= \frac{MNP}{(bc+N)(bcd+Nd+Pb)}$ ecc. . Il valore dunque della frazione continua del §.250 si esprime per la serie solita de' termini in questa guisa $x = a + \frac{M}{b} - \frac{MN}{b(bc+N)} + \frac{MNP}{(bc+N)(bcd+Nd+Pb)}$ — ecc. serie, che in ogni caso s' interromperà, sempre che la data frazione non andrà all' infinito.

253. Quindi facendo $a = 0$, affinchè la formola esprima una pura frazione continua (§.248), si avrà una serie convergentissima, che dopo pochi termini giugne al vero valore; purchè però i numeratori della data frazione continua sieno grandezze costanti, ed i denominatori sieno numeri interi positivi.

Problema Inverso:

254. Il problema inverso consiste in *cercare la frazione continua corrispondente ad una data serie.* Sia dunque la serie data espressa per $x=A-B+C-D+E-F$ ecc. corrispondente ad $x=\frac{M}{b}-\frac{MN}{b(bc+N)}+$ ecc., sarà

$$A=\frac{M}{b}\qquad\qquad \text{Quindi } A=\frac{M}{b}$$

$$B=\frac{MN}{b(bc+N)}\qquad\qquad \frac{B}{A}=\frac{N}{bc+N}$$

$$C=\frac{MNP}{(bc+N)(bcd+Nd+Pb)}\qquad\qquad \frac{C}{B}=\frac{Pb}{bcd+Nd+Pb}$$

$$D=\text{ecc.}\qquad\qquad \frac{D}{C}=\ldots\text{ ecc.}$$

$$M=Ab\qquad\qquad \text{E finalmente } M=Ab$$

$$N=\frac{Bbc}{A-B}\qquad\qquad N=\frac{Bbc}{A-B}$$

$$P=\frac{Cd(bc+N)}{b(B-C)}\qquad\qquad P=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$Q=\frac{De(bcd+Nd+Pb)}{(bc+N)(C-D)}\qquad\qquad Q=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

ecc. ecc.

255. Essendosi valutati i numeratori M, N, P, Q ecc. restano a valutarsi i denominatori a, b, c, d ecc., i quali però bisogna, che li prendiamo tali dalla natura della serie, che essendo essi numeri interi, esprimano anche in numeri interi i numeratori. Si faccia dunque $b=1$; $c=A-B$; $d=B-C$; $e=C-D$ ecc., de' quali

valori fatte le sostituzioni nel §.254 si ha la cercata frazione continua corrispondente alla data serie, cioè . . .

$$x=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{(A-B)+\cfrac{AC}{(B-C)+\cfrac{BD}{(C-D)+\cfrac{CE}{(D-E)+\text{ ecc.}}}}}}$$

256. Sia $x=\frac{A}{B}$ fratto volgare, o decimale espresso a modo di volgare, nel quale $A>B$; fo sopra di esso l' operazione della massima comune misura (§.46.), e chiamando i quoti a, b, c, d ecc., e i rispettivi residui M, N, P, Q ecc., avrò per la natura della divisione . . .

$A=aB+M$ Quindi $\frac{A}{B}=a+\frac{M}{B}$

$B=bM+N$ $\quad \frac{B}{M}=b+\frac{N}{M}$ Onde $\frac{M}{B}=\cfrac{1}{b+\frac{N}{M}}$

$M=cN+P$ $\quad \frac{M}{N}=c+\frac{P}{N}$ $\quad \frac{N}{M}=\cfrac{1}{c+\frac{P}{N}}$

$N=dP+Q$ $\quad \frac{N}{P}=d+\frac{Q}{P}$ $\quad \frac{P}{N}=\cfrac{1}{d+\frac{Q}{P}}$

E fatta la sostituzione, avrò . . . . .

$$x=\frac{A}{B}=a+\frac{M}{B}=a+\cfrac{1}{b+\frac{N}{M}}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\frac{P}{N}}}=\dots\dots$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\frac{Q}{P}\text{ ecc.}}}}$$

Volendo dunque segnare il valore di x con i quoti interi a, b, c, d ecc. avrò . . .

$$x = \frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \text{ecc.}}}}}$$

Ecco come qualunque frazione ordinaria si può convertire in continua.

257. Vengo al fatto, e cerco la frazione continua corrispondente al rotto $\frac{1461}{59}$, i cui numeratori sieno unità. Istituisco l' operazione del massimo comun divisore, sostituisco a' valori a, b, c, d i quoti, ed avrò . . .

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{ecc.}}}}}}$$

258. Che se la frazione è decimale, come $\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000}$, fatta la stessa operazione, si ha

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} \text{(a)}.$$

(a) Con questo metodo si può speditamente maneggiare il problema trattato dal Wallisio, nel quale di una frazione di molte cifre cerca il valore il più prossimo, che si può avere per mezzo di rotti di poche cifre. Il Signor De-la Grange ha molto estesa la teoria delle frazioni continue, come si può vedere nelle aggiunte fatte all' Algebra di Eulero. Si legga anche lo stesso Eulero nel Cap. XVIII. della introduzione all' analisi degl' infiniti.

259. Per dare un'applicazione di questo metodo, cerco il rapporto della periferia del cerchio al raggio, ossia di $p:r$. Preso il raggio come unità, il numero decimale della periferia è 3, 14159265535... ecc. con 129 altre figure. Or quì altro non dee farsi, che cambiare il dato decimale in frazione continua. Per comodo del calcolo maneggiato il decimale con le prime trentadue figure; si hanno le seguenti frazioni $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{103993}{33102}$ ecc. La seconda di queste frazioni dà il rapporto del diametro alla periferia $= 1 : 3$, rapporto di cui non se ne può dare più approssimante in numeri così piccoli. Le altre frazioni, perchè segnate con numeri più grandi, si avvicinano più al vero valore (a).

LEZIONE XVIII.

Termine generale, e Somma delle Grandezze in successione.

260. Così nascono tutte le serie della evoluzione delle grandezze algebriche. Bisogna però distinguere le serie, delle quali può aversi la vera somma, dette perciò *sommabili*, dalle serie, delle quali non si ha la somma che

(a) Di queste frazioni la seconda, cioè $\frac{22}{7}$, segna l'espressione di *Archimede* $22 : 7 = p : r$; la quarta $\frac{355}{113}$, ossia $355 : 113 = p : r$, segna l'espressione di *Mezio*, la quale talmente si approssima al vero valore, che il di lei errore è minore di $\frac{1}{113 \times 33102}$; le altre frazioni sono alternativamente una maggiore, e l'altra minore della vera.

per approssimazione, chiamate perciò *non sommabili*. L'esatta applicazione del metodo, che esporremo, di cui son capaci le prime, non già le seconde, ci farà distinguere le une dalle altre.

261. Delle serie sommabili le più usate ne' calcoli sono . . . .

I. *Le Serie Aritmetiche* dette così per l'analogia, che nella formazione hanno colle progressioni aritmetiche; e queste o hanno *le prime differenze* costanti, ch'è la differenza de' termini successivi; o costanti le differenze delle differenze prime, ossia *le seconde differenze*; o costanti le differenze delle seconde differenze, ossia *le differenze terze*; e così *le quarte*, *le quinte*, *le* n^{esime}: e chiamando *serie aritmetiche di primo ordine* le semplici progressioni aritmetiche, chiamo le altre *serie aritmetiche* di *secondo*, di *terzo*, di n^{esimo} *ordine* (a).

(*a*) La serie naturale 1, 2, 3, 4, 5 . . . m è di primo ordine: le seconde potenze di m formano una serie di secondo ordine, cioè 1, 4, 9, 16, 25
3, 5, 7, 9 *prime differenze*.
2, 2, 2 *seconde differenze costanti*.
Così le terze potenze di m formano una serie di terzo ordine: e generalmente le potenze n di m formano una serie aritmetica di ordine n. Quindi la formola $A+Bm+Cm^2+Dm^3+\ldots Um^n$ rappresenterà tutte le serie aritmetiche fino all'ordine n; cioè Bm rappresenterà un termine qualunque delle serie aritmetiche di primo ordine; Cm^2 rappresenterà quelle di secondo ordine; Dm^3 quelle di terzo ordine; ed Um^n quelle di ordine n; cosicchè $A+Bm$ rappresenterà la serie aritmetica di primo ordine; $A+Bm+Cm^2$ quella di secondo ordine, e così innanzi. Dal che si vede, che le progressioni geometriche, ed aritmetiche (Lez. XV. XVI.) sono nella più alta teoria serie di primo ordine.
Or se la dottrina delle prime, seconde, terze ecc. differenze delle serie numeriche si applica alle grandezze lineari fino alla loro costante differenza, si otterrà la soluzione di un celebre problema geometrico: *Determinare l'equazione alla curva segnata sulla carta con un tratto di penna comunque.*

II. *Le Serie Geometriche*, così chiamate anche per l'analogia, che nella loro formazione hanno colle progressioni geometriche; e perchè queste vengono anche formate dall' addizione de' termini analoghi di più progressioni geometriche, perciò si diranno *di primo ordine* le semplici progressioni geometriche: quelle poi che vengono formate dall' addizione de' termini analoghi di due, di tre, di n progressioni, si diranno *Serie geometriche* di *secondo*, di *terzo*, di n *ordine* (a).

III. *Le Serie Composte* finalmente sono quelle, che nascono dalla combinazione delle aritmetiche, e geometriche. Son dette perciò serie *Aritmetico-Geometriche*, e vengono espresse dalla formola $(A+Bm+Cm'+\ldots Um'')Q^m$, la quale vien composta da diverse serie aritmetiche all' infinito, e da qualunque serie geometrica. In questa serie la somma degli esponenti dell' ordine delle due serie forma l' esponente dell'ordine della serie.

IV. Tutte le serie poi, nelle quali i termini susseguenti vengon formati da' precedenti, rispettivamente moltiplicati da grandezze costanti, si chiamano *Serie Ricorrenti* (b).

(a) Se di P, Q, R . . ecc. rappresenti ciascuno un dato diverso numero, ma base di una progressione geometrica, sarà P^m, Q^m, R^m . . . ecc. la progressione di esponente m. Or dando a ciascun termine il coefficiente indeterminato, rappresenteranno essi indeterminatamente qualunque termine m di diverse progressioni geometriche. Quindi nella formola $AP^m+BQ^m+CR^m+\ldots$ ecc. chiamando n il numero de' termini, rappresenterà essa successivamente le serie geometriche di numero n: vale a dire che se $n=1$, il primo termine AP^m rappresenterà serie geometriche di primo ordine. Se $n=2$, rappresenterà AP^m+BQ^m serie geometriche di secondo ordine. E così del resto.

(b) Il Sig. Moivre e stato quegli, che ha dato il nome di *ricorrenti* a tali serie. Daniele Bernoulli nel T. III. de' Com. dell'Accad. Petrop. fa vedere l' uso delle serie ricorrenti per la

Serie Aritmetico-Ricorrenti.

262. Una funzione di m tale, che se per m si scrivono successivamente i termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, ... m, dia successivamente il primo, il secondo, il terzo, l' m^{esimo} termine della serie data; dicesi *Termine generale* della Serie (a).
Una funzione parimente di m tale, che se invece di m si sostituiscono successivamente i termini 2, 3 ... m della serie naturale, dia successivamente la somma de' primi due, de' primi tre, de' termini m della serie data; chiamasi *Somma generale* della serie.

263. Quindi è chiaro, che il termine generale di qualunque serie (Not. 262) pareggia la somma di tutti i termini di essa sino ad m inclusivo, meno la somma di tutti i termini, inclusivamente il termine $m-1$. Dunque chiamando S la somma de' termini m, ed s la somma de' termini $m-1$, sarà $T=S-s$.

264. Esamino ora la serie $Am+Bm^2+Cm^3$.... ecc.
I. Se $S=Am$, e cerco il valore di s; sostituisco $m-1$ in vece di m, ed ho $s=A(m-1)=Am-A$; Dunque (§. 263) $T=S-s=Am-Am+A=A$, valore privo di m; dun-

---

ricerca delle radici in una equazione di qualunque grado. Eulero nel Cap. XVII. T. I. Intro. all' Analis. dell' Infin. applica anche questo metodo con molta eleganza alla evoluzione delle radici dell' equazioni, incominciando dalle proprietà delle serie ricorrenti.

(a) Da ciò si deduce, che il termine generale di una serie è sempre l' ultimo; e potendosi la serie fermare in ogni termine, ogni termine di essa può esser termine generale. Così della serie $A+Apz+Ap^2z^2+Ap^3z^3+$ ecc. nata dalla evoluzione del fratto $\frac{A}{1-pz}$ il termine generale è $Ap^m z^m$; giacchè se ad m si sostituisce successivamente la serie de' numeri naturali cominciando dallo zero, si hanno i successivi termini della serie data.

que la serie è di grandezze costanti A ; A , A ecc. ; la cui somma è la stessa Am.

II. Se $S=Am+Bm^2$, sostituendo $m-1$ ad m , avrò $s=-A+Am+B-2Bm+Bm^2$, e $T=S-s=Am+Bm^2+A-Am-B+2Bm-Bm^2=A-B+2Bm$ (§.23).

Sostituisco la serie de' numeri naturali in vece di m , e supponendo $m=1$, ho $T=A-B+2B\times1=A+B$; facendo $m=2$, ho $T=A-B+2B\times2=A+3B$; facendo $m=3$, ho $T=A-B+2B\times3=A+5B$, e così del resto. Ma $A+B$, $A+3B$, $A+5B$ ecc. è una serie aritmetica di primo ordine (§.261.1) , la cui differenza costante è $2B$. Dunque la forma del termine generale di questa serie dev' essere $A-B+2Bm$, di cui una parte $A-B$ è costante , ed un'altra è moltiplicata per la lineare m , cioè $2Bm$; ed in questo caso la loro somma sarà espressa da $Am+Bm^2$.

III. Se $S=Am+Bm^2+Cm^3$, fatta la stessa sostituzione di $m-1$, si ha $T=S-s=A-B+2Bm+C-3Cm+3Cm^2$; e sostituendo i valori della serie naturale 1, 2, 3, 4 , 5 , ecc. (§.262) , avrò che al termine T corrisponde $A+B+C$, $A+3B+7C$, $A+5B+19C$ ... ecc., ch'è una serie aritmetica di secondo ordine (§.261.1) , la cui seconda differenza costante è $6C$.

265. Quindi stabilisco due canoni generali per la pratica , cioè . . . .

I. *Che le serie aritmetiche ricorrenti di ordine* n *hanno per termine generale una funzione di* m, *nel quale si trova* m *innalzata alla potenza* n.

II. *Che la serie, che ha per termine generale una funzione di* m, *nella quale* m *è innalzata alla potenza* n; *ha per somma generale una funzione di* m, *il cui massimo esponente è* n+1.

266. Ecco la facile generale applicazione di questi due metodi.

I. Se di una serie a differenza n^{esima} costante si cerca il

termine generale; si prenda indeterminatamente $T=A+Bm+Cm^2+Dm^3+\ldots Um^n$; si faccia successivamente m uguale ai numeri della serie naturale 1, 2, 3, ecc.; si faccia il successivo paragone dell' indeterminato T col primo, secondo, terzo ecc. termine della data serie, e si avrà un numero di equazioni uguale alle indeterminate in T. Quindi dedotti i valori di queste indeterminate A, B, C, D ecc., si sostituiscano in T, e si avrà il termine generale richiesto. II. Trovato così, oppure dato il termine generale di una serie a differenza n^{esima} costante, se si cerca la somma generale della medesima; si prenda indeterminatamente $S=Am+Bm^2+Cm^3+\ldots Um^n$; si faccia la sostituzione di $m-1$ in vece di m (§.263), per avere il valore di $T=S-s$; si paragonino le parti di questo T colle rispettive del termine dato, e si avranno tante equazioni, quante sono le indeterminate di T, i valori delle quali sostituiti in S danno la somma generale di quella serie, della quale è dato, o si è trovato il termine generale.

Serie Geometrico-Ricorrenti.

267. Per le serie geometrico-ricorrenti sia $S=AP^m-A$. Sostituisco $m-1$ in vece di m, ed avrò $s=AP^{m-1}-A$; dunque (§.263) $T=S-s=AP^m-A-AP^{m-1}+A=\ldots$

$$AP^m-AP^{m-1}=\frac{AP^{m+1}-AP^{m-1+1}}{P}=\frac{A(P-1)}{P}P^m\ldots$$

268. Questo termine generale nell'atto che ci propone una serie geometrica di primo ordine, ci fa vedere... I. Che qualora ci è dato un termine generale, di cui i fattori componenti sieno uno della forma P^m, e l'altro della forma $\frac{A(P-1)}{P}$, la serie, cui appartiene, è di primo ordine.

II. Che paragonando al solito i dati fattori componenti coi nostri indeterminati, si avranno i valori di A, e P da sostituirsi in S, affinchè si abbia la somma.
III. Che se si cerca il termine generale, data la serie geometrica, deesi paragonare l' indeterminato T coi due primi termini della serie data, e si avrà il valore di A, e P da sostituirsi in T, per aversi il termine generale.

269. Si è avvertito nel § 261.II., che le serie geometriche di gradi superiori sono un aggregato di serie geometriche di primo ordine. Dunque . . . .
I. La somma de' termini generali delle serie componenti darà il termine generale della composta.
II. Dato il termine generale della composta, la somma delle generali somme delle sue parti sarà la somma generale della composta data.

270. Ma qual è il metodo per trovare il termine generale delle serie geometrico-ricorrenti? La legge di tali serie si conosce, subito che sono dati i moltiplicatori de' termini P, Q, R, ecc. precedenti il termine T, che si cerca. Ora chiamando di questi moltiplicatori p la somma, che accompagna il secondo termine (§.155); q i prodotti a due a due, che accompagnano il terzo termine; r i prodotti a tre a tre, che accompagnano il quarto termine .... ecc., i quali entrano nella formazione del termine generale $T=AP^m+BQ^n+CR^n+\ldots$ ecc.; tutto si riduce a separare da' prodotti p, q, r, ... ecc. le grandezze P, Q, R, ecc. che debbonsi sostituire in T. Ciò facilmente si ottiene con chiamare x il valore di ciascuna di queste grandezze, ed m il loro numero; onde avrò $x^m-px^{m-1}+qx^{m-2}-rx^{m-3}+\ldots$ ecc. $=0$. Quindi si determinino le radici di questa equazione, e si avranno i cercati valori.

Serie Aritmetico-Geometriche.

271. Se delle serie aritmetico-geometriche si cerca il termine generale, l'operazione è simile all' antecedente (§.270). Chiamo p', q', r' ec. i coefficienti, che accompagnano le indeterminate, e formo l'equazione, come sopra(§.270)$x^m - p'x^{m-1} + q'x^{m-2} - r'x^{m-3} + \ldots$ ecc.$=0$: trovo le radici di questa equazione, e le sostituisco in T, ed avrò ciò, che si cerca.

272. I due principj stabiliti nel §.269 per le serie geometrico-ricorrenti di grado più elevato del primo si applicano facilmente alle serie ricorrenti aritmetico-geometriche. In queste però si adopera la somma, o moltiplicazione delle parti de' termini, e delle somme generali, secondo che si trovano esse serie formate o dalla somma, o dalla moltiplicazione delle serie componenti (a).

Serie Interrotte.

273. Se di una serie *continuata* X, si prendono de' termini ad uguali intervalli t, e se ne forma una serie Y, questa *Serie* è quella, che chiamo *Interrotta* (b).

274. Or quì è chiaro, che per aversi il secondo termine di Y, bisogna lasciare un numero t di termini dopo il primo termine di X; dunque il secondo termine di Y è il termine $(1+\overline{t+1})^{esimo}$ di X (c). Per avere il

(a) Delle serie non ricorrenti chi ne vuole una precisa notizia, legga il Commentario del P. Riccati.

(b) Indicherò da ora innanzi sempre per X le serie continuate, e per Y le interrotte, la quale nomenclatura userò anche nella interpolazione delle serie.

(c) In questa formola la prima unità indica il primo termine di X lasciato. Segna poi t le sedi tolte, e $t+1$ indica le sedi tolte, più la sede di X, ch'è segnata in Y.

terzo termine di Y, bisogna lasciare un altro numero t di termini in X, cioè $t+1$, dopo il termine $(1+\overline{t+1})^{esimo}$; onde sarà il terzo termine di $Y=(1+\overline{t+1}+\overline{t+1})^{esimo}=$ ... $(2t+3)^{esimo}$ di X; così il quarto di Y sarà $=(3t+4)^{esimo}$ di X; e generalmente il termine m^{esimo} di Y sarà $=$ .... $((m-1)t+m)^{esimo}$ di X. Dunque ....

TEOR. LXXXIX. *Il termine m^{esimo} di una serie interrotta Y è $((m-1)t+m)^{esimo}$ della corrispondente continuata X.*

275. Ora chiamo m la classe del termine m^{esimo} di X, ed m' quella del termine m^{esimo} di Y, ed avrò (§.274) $m'=(m-1)t+m=mt-t+m=(t+1)m-t$; ed isolando m, avrò $m=\frac{m'+t}{t+1}$. Dunque ...

TEOR. XC. *Il termine m^{esimo} di una serie continuata X vien espresso da $\frac{m'+t}{t+1}^{esimo}$ della corrispondente serie interrotta Y* (a).

276. Quindi il problema generale in questa teoria è così enunciato ...

Data la legge di una serie interrotta qualunque o aritmetica, o geometrica, o comunque da queste due composta, trovare T, ed S della corrispondente continuata. La soluzione n'è facile, subito che si sa la legge. Saputasi questa, cerco T, ed S della serie Y, considerandola come se fosse continuata, ed in vece di m sostituisco in ambidue il numero (§.275) $\frac{m+t}{t+1}$, ed avrò il T, ed S della serie continuata X.

(a) Si avverta, che nelle due formole de' §§.274.275. m, ed m' segnano lo stesso numero, e l'accento su di un m si è posto solo per distinguere l'm della serie continuata dall'm della serie interrotta

277. Vengo al fatto. Tolgo due successivi termini dalla serie geometrica continuata 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ecc., e ne formo l' interrotta 1, 8, 64 ecc. Posta dunque la legge della serie interrotta, e posto anche noto il numero t de' termini lasciati nella continuata, per formare l' interrotta, cerco S, e T della continuata. Conosco il termine generale della interrotta $=8^{m-1}$; sostituisco dunque $\frac{m+t}{t+1}$ (§.275) in vece di m, ed ho che il termine generale della serie continuata è $T=8^{m-1}=8^{\frac{m+t}{t+1}-1}=8^{\frac{m+t}{2+1}-1}=8^{\frac{m-1}{3}}$. La stessa operazione si faccia per S, e si avrà determinato il T, e la S ricercata (*a*).

Interpolazione delle Serie.

278. Dico *interpolare* una serie, quando fra due qualunque suoi termini v' inserisco un numero r di termini intermedj, che conservano tra essi la stessa legge de' termini della data serie (*b*).

(a) Il Goldbacchio negli atti di Lipsia 1720 assegna altre formole per la determinazione della somma, e del termine generale delle serie. Io però in questa teoria delle Serie non ho voluto perdere le tracce del P. Riccati nell' insigne Commentario *de Seriebus recipientibus summam algebricam, aut exponentialem.*

(b) Il primo a proporre il celebre problema delle interpolazioni è stato il Sig. Mouton nel 1670. I più celebri Geometri conoscendone l' importanza in tutta la Matematica si accinsero a sciogliello, ed illustrarlo. Nel T. 2. p. 180. dell' Accad. Petrop. si trova l' analitica soluzione di Mayer. L' Abate La-Caille nello scolio della P. I. Sez. I. Astron. riduce a più semplice forma le formole di Mayer. Il Newton ha ridotto alla Geometria lo stesso problema nella sua Aritmetica Universale Probl. Geom. 55, 58, 61, e nel Lem. 5. della se-

279. A stretto rigore dunque il problema della interpolazione è una parte (*a*) del problema delle serie interrotte (§.273.) Ora per l' interpolazione delle serie aritmetiche di primo ordine abbiamo la formola nel §. 232; come l' abbiamo per le serie geometriche di primo ordine nel §. 238. Noi dunque quì ci proponiamo la soluzione del problema così enunciato . . . . *Interpolare tutte le serie di ordine* n *di qualunque genere sommabili o non sommabili, purchè se ne possa fissare il termine generale* (b).

280. Vengo dunque alla soluzione del problema. Chiamo *m* la classe, che occupa in *X* qualunque termine *r*; indico per *m'* la classe, che lo stesso *r* occupa

---

conda continuazione del lib. 3. princip. esemplifica questo metodo, quantunque ne dia la sola soluzione. L' Ermanno nell' appendice alla Foronomia, e 'l Craigio nel trattato delle quantità fluenti lo mettono nel suo aspetto. Si possono anche consultare le Seur e Jacquier ne' Commentarj al secondo libro de' principj di Newton ne' numeri 75, 76, 77; il Cotes de Calc. diff. Newt., ed il celebre Stirling verso la fine dell' egregio trattato sulla interpolazione delle serie.

(*a*) Ho detto *una parte*, perchè la serie continuata, che si forma dalla serie interrotta, non è propriamente la serie interpolata, giacchè in tutto colla interpolazione si cercano i termini $n(t+1)+1$; ma col termine generale della serie continuata si trovano tutti gli altri termini all' infinito, per cui il problema della interpolazione è meno generale di quello delle serie interrotte.

(b) Prima di venire alla interpolazione delle serie, bisogna distinguerne attentamente la specie, affinchè si possa valutare il vero termine generale, per quindi avere gli esatti termini intermedj. Che se poi non si può determinare a quale classe appartengano, si è convenuto maneggiarle, come se effettivamente fossero di quella specie, alla quale più si accostano. De La Lande Accad. Par. anno 1761 p. 125., ed Astr. l. 24 ha dimostrato elegantemente, che pei calcoli astronomici bisogna ricorrere alle medie aritmetiche proporzionali.

in Y, ed è chiaro, che m, m' segneranno quì numeri sempre diversi. Ciò posto, così la discorro:
Le serie X oltre de' termini di Y contiene di più tutti li q^{esimi} di t omessi, per formare Y. Dunque in Y si contengono i termini $(m-q)^{esimi}$ di X; vale a dire, che gli m'^{esimi} di Y sono gli $(m-q)^{esimi}$ di X; ma (§. 279) gli m'^{esimi} di Y sono gli $((m'-1)\,t+m')^{esimi}$ di X; dunque gli $(m-q)^{esimi}$ di X sono gli $((m'-1)\,t+m')$ dello stesso X. Quindi è, che $m-q=(m'-1)\,t+m'=m'\,t-t+m'$; ed $m'(t+1)+q=m+t$, ossia $m'+\frac{q}{t+1}=\frac{m+t}{t+1}$; il numero cioè di $m'+\frac{q}{t+1}$ pareggia il numero, che sostituito in TY dà il q^{esimo} cercato. Ed ecco come si trova il termine q^{esimo} de' t interpolati tra il termine m^{esimo}, ed $(m+1)^{esimo}$ di una data serie Y (a).

(a) Gardiner nelle sue tavole logaritmiche stampate in Londra 1742, e de La-Lande Accad., ed Astronomia Lib. 24 num. 3172 ci presentano due elegantissimi metodi per l' interpolazione delle serie aritmetiche sino alle terze differenze inclusive. Gardiner chiama a ciò, che per noi nel §. 280 è $\frac{q}{t+1}$, dice b ciò, ch'è per noi $\frac{q}{t+1}-1$, e segna le differenze prime, seconde, e terze de' numeri dati per d' d'' d'''. La grandezza da aggiungersi al termine m^{esimo}, per avere il termine cercato, è per le seconde differenze $=(d'+\frac{bd''}{2})\,a$, e per le terze è $=(d'+\frac{bd''}{2}+\frac{d'''}{6}(b+b^2))\,a$.
De La-Laude poi chiama p quello, che per noi nel §. 280 è q, fa corrispondere m al nostro $t+1$, chiama d la differenza fra il termine m^{esimo}, ed il termine $(m+1)^{esimo}$, tra i quali cerca il p^{esimo}, e segna le differenze seconde, e terze de' dati termini per d^2, d^3. Quindi stabilisce la grandezza da aggiungersi al termine m^{esimo}, per avere il termine cercato, essere per le seconde differenze $=p\frac{d}{m}+p\frac{p-m}{2}\times\frac{d^2}{m^2}$, e per le terze $=p\frac{d}{m}+p\frac{p^2-m^2}{6}\times\frac{d^3}{m^3}$.

LEZIONE XIX.

Trasformazione delle operazioni della Grandezza Discreta.

281. Il nojoso calcolo nella moltiplicazione, e divisione, nella formazione delle potenze, ed estrazione delle radici de' numeri troppo grandi, ha fatto immaginare un metodo, col quale la moltiplicazione si converte in somma; la divisione si cambia in sottrazione; la formazione delle potenze si eseguisce con assai corte moltiplicazioni; e l'estrazione delle radici passa ad una facile divisione(*a*).

282. Tutta la teoria consiste in un problema così enunciato: *Trovare l'esponente variabile* z *della potenza, cui innalzando la grandezza costante* a, *sia* $a^z = y$ *numero dato.* Quindi è, che z pareggia una funzione della variabile y. Questa funzione di y, alla quale è uguale z qualora siasi posto $a^z = y$ è quella, che dico *Logaritmo* di y, e lo segno con l; è sarà $z = \mathrm{l}y$. Chiamo poi *Base Logaritmica* la grandezza costante a; la quale quantunque arbitraria, pure deve essere maggiore dell' unità(*b*).

283. Essendo (§.36) $a^0 = 1$, sarà $o = \mathrm{l}1$ Dunque. .

TEOR. XCI. *Qualunque sia la base logaritmica, sempre lo zero è logaritmo dell' unità.*

284. Quindi si valuta subito la base logaritmica per quel numero, il cui logaritmo è $= 1$.

285. Or se $y > 1$, essendo $a^0 = 1$, sarà $y > a^0$, e (§.282) $\mathrm{l}y > o$, cioè grandezza positiva. Dunque . . .

TEOR. XCII. *I logaritmi delle grandezze maggiori dell' unità son positivi.*

(*a*) Nepero Barone Scozzese immaginò queste trasformazioni; e Briggs, ed Ulacq ne costruirono le tavole per le operazioni.

(b) Questa è la più netta e vera idea, che si possa dare de' logaritmi. Leggasi Eulero T. I., C. 6 Intro. Analis. Inf.

286. Se $a<1$, sarà $\frac{1}{a}<1$, ossia $a^{-1}<1$, e (§.282) $la^{-1}=-1=$ (§.37) $l\frac{1}{a}$. Dunque ....

TEOR. XCIII. *I logaritmi de' numeri positivi, ma minori dell' unità, son negativi* (a).

287. Se poi questi numeri minori dell'unità fossero negativi, allora i loro logaritmi sarebbero immaginarj (*b*).

288. Sia $y=a^z$, ed $u=a^x$, avrò (§.28) $uy=a^{x+z}$, e (§.282) $luy=x+z=lu+ly$; ma nelle tavole a' logaritmi corrispondono i numeri. Dunque ....

(a) Quindi i logaritmi negativi son logaritmi delle frazioni, come i logaritmi positivi son logaritmi de' numeri interi. I calcolatori delle tavole astronomiche, e trigonometriche sanno l' imbarazzo, che recano i logaritmi negativi. Il P. Boscovich in una sua memoria intitolata *Metodo di evitare i logaritmi negativi* dice: « Si otterrà facilmente questo fine, se al logaritmo di qua» lunque frazione se ne sostituisca un altro, il quale nasca da » un' aggiunta, che se gli fa, senza che questa aggiunta turbi il » calcolo; ove si badi a quello, che si è aggiunto, per tenerne » conto al luogo debito ». Egli fa consistere tutto il metodo in questa proposizione: *Si può supporre, che il logaritmo dell'unità sia* 10^n, che chiama *gran logaritmo*, come può vedersi in detta memoria.

(b) Nel Tomo II. pag. 269. del Commercio epistolico tra Leibnitz, e Bernoulli si legge la grande controversia pei logaritmi delle quantità negative. Il primo sostiene essere immaginarj, ed il secondo li vuole reali. Nel 1746, e 1747 si suscitò con lettere la questione tra d'Alembert, ed Eulero, stando il primo per Bernoulli, e'l secondo per Leibnitz. In conseguenza di ciò Eulero diede nel 1751 una memoria nel tomo di Berlino pel 1749, e d'Alembert ne diede un'altra nel primo tomo de' suoi opuscoli nel 1761. Il Walmesley nelle memorie di Berlino del 1755 dimostra le stesse formole dell'Eulero. Il Cav. di Foncenex sostenendo la sentenza del Leibnitz nelle memorie di Torino del 1759 dimostra con un terzo metodo le formole dell' Eulero. Si legge anche qualche cosa su tale questione ne' 12 Commentarj del P. Scarrella pubblicati nel 1766.

TEOR. XCIV. *Il prodotto di due numeri dati è quel numero, che nelle tavole corrisponde alla somma de' logaritmi de' dati fattori.*

289. Essendo $y=a^z$, $u=a^x$, sarà $\frac{y}{u}=\frac{a^z}{a^x}=a^{z-x}$; e perciò sarà $l\frac{y}{u}=la^{z-x}=$ (§.282 $z-x=ly-lu$; ma nelle tavole a' logaritmi corrispondono i numeri. Dunque ...

TEOR. XCV. *Il quoto di due numeri è quel numero, che nelle tavole corrisponde al logaritmo del dividendo, meno il logaritmo del divisore.*

290. Se $a^z=y$, sarà $z=ly$: così se $a^{nz}=y^n$, sarà $ly^n=nz=nly$; ma nelle tavole a' logaritmi corrispondono i numeri. Dunque . . . .

TEOR. XCVI. *La potenza di un dato numero di dato esponente è quel numero, che nelle tavole corrisponde al logaritmo del dato numero, moltiplicato per l' esponente dato.*

291. Dal §.290 si ha $ly^{\frac{n}{m}}=\frac{n}{m}ly$; ma $ly^{\frac{n}{m}}=l\sqrt[m]{y^n}$ (§.87); dunque $l\sqrt[m]{y^n}=\frac{nly}{m}$; ma nelle tavole a' logaritmi corrispondono i numeri. Dunque . . . .

TEOR. XCVII. *La radice di un numero dato di dato esponente è quel numero, che nelle tavole corrisponde al logaritmo del dato numero di dato esponente, diviso per l'esponente della data radice.*

292 Quindi sarà $l\sqrt{xy}=\frac{lx+ly}{2}$; ma $\sqrt{xy}$ è un medio geometrico proporzionale tra x, ed y (§.194.IV). Dunque . . .

TEOR. XCVIII. *Il numero medio geometrico proporzionale tra due numeri dati è quello, che nelle tavole corrisponde alla semisomma de' logaritmi de' numeri dati.*

Costruzione delle Comuni Tavole Logaritmiche.

293. Se l'esponente variabile z si va successivamente modificando su di a in guisa, che formi una progressione aritmetica (§. 226), si avrà $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7 \ldots \infty$ progressione geometrica (§. 234). Suppongo la base $a=10$, ed avrò, 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, ecc., ossia 1, 10, 100, 1000, 10000 ecc.; e perchè $z=ly$, quando $a^z=y$, sarà perciò $0=l1$, $1=la^1=l10^1=l10$, $2=la^2=l10^2=l100$, $3=la^3=l10^3=l1000$ ecc. Abbiamo così i logaritmi di 1, 10, 100, 1000 ecc., ma non de' numeri intermedj, i quali son desiderabili. Or le grandezze intere tra a^0, a^1, tra a^1, a^2 ecc. debbono formare con queste una progressione geometrica, ed i loro esponenti 0, 1, 2, 3, 4 una progressione aritmetica; dunque dovendosene tra 0, e 10 interpolare 9; tra 10, e 100 interpolare 90 ecc., troveremo gli esponenti di questi tra 0, ed 1, tra 1, e 2, tra 2, e 3 ecc., i quali saranno frazionarj. Ecco la grande necessità d' introdurre le frazioni decimali; ed affinchè queste fossero anche omogenee cogli esponenti de' limiti 10, 100 1000 ecc., gli esponenti di questi si buttano anche in fratti decimali ordinariamente con sette cifre, cioè 0, 0000000 $=l1$; 1, 0000000 $=l10$; 2, 0000000 $=l100$ ecc.

294. Per fissare il metodo, col quale ricercar si possono i logaritmi de' numeri intermedj, mi propongo a trovare il logaritmo di b tra i limiti a^2, ed a^3. Tutt' i numeri interpolabili tra a^2, a^3 debbono con questi formare una progressione geometrica (§. 293); dunque (§. 194. IV.) cerco il medio proporzionale geometrico, ed avrò $\dot{\dot{\cdot\cdot}}\ a^2, \sqrt{a^5}, a^3$, i logaritmi de' quali sono (§. 282) $2, \frac{5}{2}, 3$. Or se $b=\sqrt{a^5}$, il suo logaritmo è $\frac{5}{2}$; altri-

menti sarà b tra i limiti di a^2, $\sqrt{a^5}$, o tra i limiti di $\sqrt{a^5}$, a^3: in tutti due i casi si cerchino i medj proporzionali geometrici, ed i loro logaritmi, ed i limiti sempre più si avvicineranno, finchè fatta la loro differenza minore di qualunque data, il numero proposto si confonderà co' limiti; e perchè i logaritmi de' limiti ci son dati, si avrà perciò il logaritmo cercato di b (a).

295. Con questo metodo trovati i logaritmi de' numeri primi, e moltiplicando questi stessi logaritmi per 2, per 3, per n, si avranno i logaritmi delle potenze seconde, terze, n^{esime} (§.290); come si avranno i logaritmi de' prodotti colla somma de' logaritmi de' fattori (§.288), e così si evita la noja del calcolo.

296. Ora rifletto su di ciò, che si è stabilito nel §. 293, e trovo . . . .

I. Che ogni logaritmo vien composto da due parti, da un numero intero cioè, la cui mancanza vien supplita dallo zero, e dalla parte decimale staccata dalla prima con una virgola; di queste chiamo *Mantissa* la parte decimale, e dico *Caratteristica* la parte intera.

II. Che nelle tavole i logaritmi tra i numeri 1, e 10 sono tra lo zero, e l' unità; quei de' numeri tra 10, e 100 si contengono tra l'unità, e 'l 2. Quindi la caratte-

(a) Se si cerca il logaritmo di 5, si operi tra i limiti 1, e 10; ossia tra 1, 000000, e 10, 000000 si cerchi un medio proporzionale geometrico A, e di questo si prenda il logaritmo; il quale pareggia la semisomma de' logaritmi di 1, e 10 (§.292). Si trovi un altro medio proporzionale geometrico tra A, e 10, che dico B, e se ne prenda il logaritmo: si continui così, finchè si trovi, che il medio geometrico proporzionale sia il richiesto 5. Se ne prenda il suo logaritmo (§.291), e posta la base logaritmica $= 10$, si avrà $l5 = 0, 698970$, ossia prossimamente $5 = 10^{0,698970}$. Questo fu il metodo pel computo de' logaritmi volgari tenuto da Briggs, ed Ulacq nel registro delle tavole logaritmiche.

ristica contiene sempre tante unità meno una, per quante sono le figure intere nel numero, che a lei corrisponde.

III. Dunque di un numero intero si conosce subito la caratteristica del logaritmo corrispondente, ed al contrario dalla caratteristica di un dato logaritmo si conosce subito quante figure debba avere il numero, che gli corrisponde.

Uso delle Comuni Tavole Logaritmiche.

297. Costruite le tavole, il loro uso è di trovare i logaritmi de' numeri dati, o i numeri corrispondenti a' dati logaritmi. Or questi numeri o sono nelle tavole, e basta riscontrarli; o sono maggiori di quelli, che sono nelle tavole, e si ritrovano colla guida delle tavole istesse, o che i detti numeri sieno interi, o decimali, o parte interi, e parte decimali.

298. Volete il logaritmo di un decimale qualunque o, 3647? Discorrete così: o, 3647 = (§.64) $\frac{3647}{10000}$; dunque (§.289) l o, 3647 = l 3647 — l 10000, i quali riscontrati nelle tavole danno = 3, 5619358 — 4, 0000000 = — o, 4380642.

299. Volete il logaritmo di un numero parte intero, e parte decimale 3647, 093? Discorrete così: il logaritmo di questo numero è tra il l 3647, che nelle tavole è = 3, 5619358, e tra il l 3648 = 3, 5620548. Or la differenza de' numeri è 1, e quella de' logaritmi è = o, 0001190; dunque se coll' aggiungere 1 al numero 3647 vien aggiunto o, 0001190 al suo logaritmo; l' addizione di o, 093 allo stesso numero 3647 mi darà il numero da aggiungersi al suo logaritmo, il quale essendo un quarto geometrico proporzionale, si trovi come nel §.194.1, si aggiunga, e si avrà l 3647, 093 = 3, 5619468.

300. Volete il logaritmo di un numero intero maggiore del massimo numero delle tavole, e sia 13647093? Discorrete così: 3647093 = (3647, 093) (1000) dunque, sarà l3647, 093+l1000=3, 5619468+3, 0000000=6, 561946°.

301. Volete il numero, che nelle tavole corrisponde al logaritmo dato 6, 5619468? Discorrete così: del suo decimale 5619468 trovo il prossimamente decimale maggiore nelle tavole, ed il prossimamente minore, ed ho pel primo 5620548, e pel secondo 5619358, la differenza de' quali è 0001190. Quindi dico: se aggiungendo la differenza al logaritmo prossimo minore si deve aggiungere l' unità al suo numero; aggiungendo al logaritmo stesso il decimale 0, 000110, differenza della mantissa data dalla prossima minore, quanto si dovrà aggiungere al suo numero corrispondente? Si trovi il quarto geometrico proporzionale, e sarà 3647, 0000+0, 0924 = 3647, 0924 = 3647092, 4, (*a*) numero cercato.

Uso de' Logaritmi nella soluzione dell' Equazioni.

302. Vi sono dell' equazioni, che di loro natura sottraggonsi dalle comuni leggi dell'Algebra, e facilmente si sciolgono per mezzo de' logaritmi. Di fatto se cerco il valore di x nella equazione $a^x = b$, farò $\mathrm{l}a^x = \mathrm{l}b$; e perciò (§.290) $x\mathrm{l}a = \mathrm{l}b$, ed $x = \frac{\mathrm{l}b}{\mathrm{l}a}$.

303. Se si cerca il valore di x nella equazione $\frac{a^{mx}}{b^{nx+1}} = q$, farò (§.290) $mx\mathrm{l}a - (nx+1)\,\mathrm{l}b = \mathrm{l}q$; ossia

$$(m\mathrm{l}a - n\mathrm{l}b)\,x = \mathrm{l}q - \mathrm{l}b, \text{ ed } x = \frac{\mathrm{l}q - \mathrm{l}b}{m\mathrm{l}a - n\mathrm{l}b} = (\S.290)\,\frac{\mathrm{l}\frac{q}{b}}{\mathrm{l}\frac{a^m}{b^n}} \ldots$$

(a) Essendo 6 la caratteristica del dato logaritmo il numero corrispondente deve contenere sette figure (§.296.11.)

304. Comparisca l'equazione sotto la forma $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = q^{-p}$; e sarà (§.294.295) $nlb - \frac{a}{x} lb - mxlc = xlq - plq$; ed ordinando l'equazione, sarà $(mlc+lq)x^2 - (nlb+plq)x = -alb$, ossia $l(c^m q)x^2 - l(b^n q^p)x = -lb^a$, equazione di secondo grado deficiente del terzo termine, la quale maneggiata, come nel §.136, dà il valore di x.

305. Se nella espressione $c = \sqrt[\pm n-1]{\frac{u}{p}}$ si cerca valutare n, avrò (§.291) $lc = \frac{lu-lp}{\pm n-1}$, e $(\pm n-1)\, lc = lu - lp$. Dunque $\pm n = 1 + \frac{lu-lp}{lc}$, ch' è la dimostrazione del valore di n assunto nel §. 236. num. IV.

306. Sia $a^{c^x} = b$, e si cerchi x, sarà (§.290) $c^x\, la = lb$, ed $xlc + l^2 a = l^2 b$, ed $x = \frac{l^2 b - l^2 a}{lc} = \frac{l^2 \frac{b}{a}}{lc}$.

307. Sciolta l'espressione $\frac{a^2 b^4 \sqrt{m}}{n\sqrt[3]{c} \times \sqrt[6]{a^2 b^7}}$ si avrà . . . $2la + 4lb + \frac{lm}{2} - ln - \frac{lc}{3} - \frac{la}{3} - \frac{7lb}{6}$, ch' è il metodo di abbreviare i calcoli numerici.

Calcolo Lagaritmico per mezzo delle Serie.

308. FORMATE con nojosi calcoli le Tavole Logaritmiche, s'inventarono de' metodi più facili da potersi a quelli sostituire, che formano il calcolo logaritmico per mezzo delle

serie, il quale per la conformità de' risultati col primo metodo, e per la sua eleganza merita di essere attentamente quì considerato nella soluzione di due problemi, uno diretto, e l'altro inverso.

Problema Diretto.

390. *Valutare il logaritmo di un numero dato.* Qualunque sia il numero, posso segnarlo per $1+x$. Sia dunque $(1+x)^m=1+z$, e sarà $ml(1+x)=l(1+z)$; e perciò (§. 247) $mAx+mBx^2+mCx^3+\ldots$ ec. $=Az+Bz^2+Cz^3+\ldots$ ecc.; ma $z=(1+x)^m-1=mx+m(\frac{m-1}{2})x^2+m(\frac{m-1}{2})(\frac{m-2}{3})x^3$ ecc. Dunque $Az=Amx+Am(\frac{m-1}{2})x^2+Am(\frac{m-1}{2})(\frac{m-2}{3})x^3$ ecc.; $Bz^2=Bm^2x^2+Bmx(m(\frac{m-1}{2})x^2)2$ ecc. (a) $=m^2Bx^2+m^2(m-1)Bx^3$ ecc., $Cz^3=m^3Cx^3$ ecc. Dunque avrò $mAx+mBx^2+mCx^3+$ecc.

$$=mAx+\left.\begin{matrix}m(\frac{m-1}{2})A\\ m^2B\end{matrix}\right\}x^2+\left.\begin{matrix}m(\frac{m-1}{2})(\frac{m-2}{3})A\\ m^2(m-1)B\\ +m^3C\end{matrix}\right\}x^3$$

$+$ ecc. ecc.

Fatto il paragone de' termini (b), si ha $mBx^2=\ldots\ldots(m(\frac{m-1}{2})A+m^2B)x^2$, cioè $(m-m^2)B=(\frac{m^2-m}{2})A=\ldots$

(a) Questo 2, che moltiplica i fattori, segna il doppio rettangolo, che forma il secondo termine del quadrato di un binomio, o polinomio qualunque (§. 76).

(b) Qualora i termini in ambidue i membri di una equazione sono *identici*, cioè rispettivamente uguali, dato ad x il valore, saranno anche identici i coefficienti delle corrispondenti potenze.

$(-m^2+m)-\frac{1}{2}A$; dunque $B=-\frac{1}{2}A$. Così si trova $C=\frac{1}{3}A$; $D=-\frac{1}{4}A$ ecc.; e fatta la sostituzione, sarà $l(1+x)=Ax-\frac{1}{2}Ax^2+\frac{1}{3}Ax^3-\frac{1}{4}Ax^4$ ecc. $=\ldots\ldots$ $A(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ ecc.) (a).

310. Nella espressione $l(1+x)$ fatto $x=\frac{m}{n}$, sarà $l(1+\frac{m}{n})=A(\frac{m}{n}-\frac{m^2}{2n^2}+\frac{m^3}{3n^3}-\frac{m^4}{4n^4}+\ldots$ ecc.), e così di qualunque altro valore, che voglia darsi ad x.

Logaritmi Naturali, o Iperbolici.

311. Chiamo *Logaritmi Naturali*, o *Iperbolici* quelli, ne' quali $l(1+\omega)=\omega$, segnando ω una grandezza infinitamente piccola (*b*).

312. Sia a la base di questi logaritmi, ed avrò (§.282) $a^\omega=1+\omega$. Innalzo l'equazione all'esponente ∞, il quale indica un numero infinito, e sarà $a^{\omega\infty}=(1+\omega)^\infty$ $=1+\frac{\infty}{1}\omega+\infty(\frac{\infty-1}{2})\omega^2+\infty(\frac{\infty-1}{2})(\frac{\infty-2}{3})\omega^3$ ecc.; ma per ipotesi ∞ segna l'infinito; dunque $\infty-1=\infty$; $\infty-2=\infty$; $\infty-3=\infty$. Ora essendo ω quantità picciolissima, se prendo una quantità finita z, e la divido per ∞, sarà

(a) La grandezza indeterminata A, che chiamo *Modulo*, fa vedere, che infiniti sono i logaritmi di un dato numero $1+x$. La più semplice però, e la più naturale posizione del modulo è $A=1$. I logaritmi così calcolati si dicono *Naturali*.

(b) Eulero calcolando questo problema Intr. Anal. Inf. Cap. VII. Tom. I., suppone $a^{\omega}=1+k\omega$.

anche questa piccolissima; dunque $\omega = \frac{z}{\infty}$; e perciò il secondo termine della serie sarà $\frac{\infty}{1}\ \omega = \frac{\infty z}{1\infty} = \frac{z}{1}$; il terzo sarà $\frac{\infty}{1}\left(\frac{\infty-1}{2}\right)\omega^2 = \frac{\infty^2 z^2}{1.2.\infty^2} = \frac{z^2}{1.2}$; e così i sussecutivi saranno $\frac{z^3}{1.2.3}$, $\frac{z^4}{1.2.3.4}$ ecc.; e perciò $a^{\omega\infty} = a^{\frac{z\infty}{\infty}} = a^z$ $= 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4}$ ecc.; e facendo $z=1$, sarà $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ ecc. i quali valori ridotti a frazioni decimali (§.64), e sommati (§.67) danno $a = 2,718281828459$. Dunque . . . .

TEOR. XCIX. *La base de' Logaritmi Iperbolici, o Naturali è* 2, 718281828459.

313. Aggiungo la alla formola del §.309, e posto $A=1$, faccio $x = \frac{y}{a}$; dunque avrò $l(a+ax) = l(a+y) = la + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2}$ $+ \frac{y^3}{3a^3}$ — ecc. Se y fosse negativa, avrei $l(a-y) = la - \frac{y}{a}$ $- \frac{y^2}{2a^2} - \frac{y^3}{3a^3}$ ecc.; dunque $l\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = l(a+y) - l(a-y) = \frac{2y}{a}$ $\left(1 + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{y^4}{5a^4} + \frac{y^6}{7a^6} + \text{ecc.}\right)$, la quale serie sarà convergente, dovendo essere $y < a$, affinchè $\frac{a+y}{a-y}$ sia grandezza positiva.

314. Or se $\frac{a+y}{a-y} = \frac{p}{p-1}$, ed $\frac{y}{a} = \frac{1}{2p-1}$, si avrà $l\left(\frac{p}{p-1}\right) = lp - l(p-1) =$ (§.310) $\frac{2}{2p-1}\left(1 + \frac{1}{3(2p-1)^2} + \ldots\right.$ $\left.\frac{1}{5(2p-1)^4} + \frac{1}{7(2p-1)^6} + \text{ecc.}\right)$, e perciò $lp = l(p-1) + \frac{2}{2p-1}$

$(1 + \frac{1}{3(2p-1)^2} +$ ecc.); ma lp è logaritmo naturale di qualunque numero p. Dunque . . . . . .

TEOR. C. *Si ha il logaritmo naturale di qualunque numero* p, *se è dato il logaritmo di* p—1.

315. Vengo all' applicazione di questo teorema.

I. Cerco il logaritmo naturale di 2. Pongo $p=2$. Essendo $l1 = 0$ (§.283), sarà $l2 = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3\,.\,3^2} + \frac{1}{5\,.\,3^4} + \frac{1}{7\,.\,3^6} + \ldots$ ecc.$) = 0,\ 6931478$, presi soli nove termini nella formola.

II. Se si vuole il logaritmo iperbolico di 5, sarà $p=5$, e perchè $4=2^2$, sarà $l5 = 2\,l2 + \frac{2}{9}(1 + \frac{1}{3\,.\,9^2} + \frac{1}{5\,.\,9^4} + \frac{1}{7\,.\,9^6}$ ecc.$) = 1,\ 6094379$.

III. Così $l10 = l2 \times 5 = 0,\ 6931478 + 1,\ 6094379 = 2,\ 3025857$.

Riduzione di un Sistema Logaritmico a qualunque altro cercato.

316. Chiamo *Sistema Logaritmico* quell' ordine, che serbano i logaritmi de' numeri naturali. Variano i sistemi logaritmici, secondo che varia la base, secondo la quale quelli si computano.

317. Sia $p = lP$ nel sistema della base a, e nel sistema di un'altra base b sia $q = lP$; dunque sarà (§.282); $P=a^p$, $P=b^q$; dunque $a^p=b^q$, ed $a = \sqrt[p]{b^q} =$ (§.87) $b^{\frac{q}{p}}$; ma a, b sono costanti, perchè basi logaritmiche, e p, q variano, secondo che varia il numero P, di cui sono logaritmi; dunque essendo $a = b^{\frac{q}{p}}$, ed a essendo co-

stante, dev' essere $b^{\frac{q}{p}}$ anche costante; ma b è costante; dunque anche $\frac{q}{p}$ ossia il rapporto $q:p$ costante. Dunque...

TEOR. CI. *In due sistemi logaritmici i logaritmi dello stesso numero serbano la stessa ragione.*

318. Sieno m, n' i logaritmi di due numeri M, N formati colla base a, sarà (§.282) $M = a^m$, $N = a^n$; elevo l' equazioni agli esponenti permutati, ed ho $M^n = a^{mn}$, $N^m = a^{nm}$; dunque $M^n = N^m$, ed $M = N^{\frac{m}{n}}$. Nella stessa guisa dati i logaritmi m', n' degli stessi numeri in un altro sistema di base a', sarà $M = N^{\frac{m'}{n'}}$; dunque $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{m'}{n'}}$, e perciò $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, ossia $m : n = m' : n'$. Dunque . . . .

TEOR. CII. *I logaritmi di due numeri in un sistema sono in proporzione geometrica coi logaritmi degli stessi numeri in un altro sistema.*

319. Ora si potranno facilmente avere i logaritmi di una qualunque proposta base, e viceversa. Si cerchino dunque i logaritmi sulla base 10, e sarà l10=1 (§.284); ed essendo generalmente l10 = A(2, 30258509) (§.315. 111), sarà $A = \frac{1}{2,\ 30258509} = 0,\ 43429448$, ch' è lo stesso. Dunque . . . . . .

TEOR. CIII. *Se per lo valore del modulo si moltiplicano tutt' i logaritmi naturali, si avranno i logaritmi della base 10.*

320. Quindi dati i logaritmi della base 10, se si moltiplicano per 2, 30258509, si hanno i logaritmi naturali.

Problema inverso.

321. *Assegnare il numero corrispondente ad un logaritmo dato.*

Riduco un logaritmo qualunque dato al sistema de' logaritmi naturali (§. 319). Sia il numero cercato $1+x$, che corrisponda al naturale logaritmo z, e sarà $z=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+$ ecc. Per determinare il valore di x in z, e sue potenze, sia $x=Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ ecc.: si faccia la seconda, la terza, la m^{esima} potenza del valore di x, le quali sostituite nella formola del valore di z danno

$$\begin{aligned} z = Az + B\,z^2 &+ C\,z^3 + D\,z^4\,) \\ -\tfrac{1}{2}A^2z^2 &- AB\,z^3 - \tfrac{1}{2}B^2z^4\,) \\ &+\tfrac{1}{3}A^3z^3 + A^2Bz^4\,)\ \text{ecc.} \\ &-\tfrac{1}{4}A^4z^4\,) \\ &-A\,C\,z^4\,) \end{aligned}$$

Faccio il paragone de' termini, come nel §.309, ed ho $A=1$; $B=\frac{1}{2}$; $C=\frac{1}{6}$; $D=\frac{1}{24}$ ecc.; sostituisco questi valori nella equazione di x, ed ho $x=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\ldots\ldots\frac{z^4}{2.3.4}+\frac{z^5}{2.3.4.5}+$ecc., e perciò il numero cercato $1+x=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{2.3.4}+$ ecc. E generalmente qualunque numero $n=1+\frac{ln}{1}+\frac{l^2n}{2}+\frac{l^3n}{2.3}+\frac{l^4n}{2.3.4}+$ ecc. (*a*). Quindi se $ln=1$, sarà $n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+$ ecc. $=\ldots\ldots$ 2, 718281[8]3, valore della base *a* nel sistema de' logaritmi naturali.

(a) Che se n fosse n^m, sarebbe $n^m=1+ln^m+\frac{l^2\,n^m}{2}$ ecc. $=1+mln+\frac{ln^m.\,ln^m}{2}+$ ecc. $=1+mln+\frac{m^2\,l^2\,n}{2}$ ecc. serie convergente, e perciò atta alla generale soluzione del proposto problema.

SEZIONE IV.

APPLICAZIONE DELL' ESPOSTE DOTTRINE PER L' UOMO, CH' È IN SOCIETA'.

LEZIONE XX.

Le Funzioni della Grandezza Discreta applicate al Commercio.

REGOLA AUREA.

322. Inutile sarebbe lo studio della grandezza discreta, se restasse ne' soli limiti della calcolazione, senza applicarla all' uso civile. Le due verità stabilite nel §. 194 I.II. sono le fondamentali per quelle operazioni, che volgarmente si chiamano *Regole Aritmetiche*. Non potendosi fare il rapporto, che fra grandezze omogenee (§.186), è chiaro, che in ogni analogia due termini almeno debbono essere di una specie, e due possono essere di specie diversa. Che perciò date tre grandezze, due delle quali sieno omogenee, si trova la quarta omogenea alla *solitaria* delle tre date.
Chiamo questa operazione *Regola del Tre* dal numero de' dati, e *Regola Aurea* per l' uso estesissimo, che di essa si fa nelle Matematiche.

323. La prima delle analogie del §. 194. I, cioè $a : b = c : x$, ci fa vedere, che la prima grandezza sta alla seconda, come la terza alla quarta, che si cerca: e tali analogie, perchè camminano secondo la loro naturale direzione, diconsi *Dirette*; e l' operazione per determinare il quarto proporzionale chiamasi *Regola del Tre*

Diretta. Ma se cerco, che la prima grandezza stia alla seconda, come la quarta alla terza, ch' è la seconda analogia del §. 194. II., cioè $a : b = x : c$, in questo caso la Regola del Tre dicesi *Inversa*, o *Reciproca*.

324. Essendo $a : b = x : c$, avrò (§. 192) $ac = bx$, ed (§. 125) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$; e sciogliendo in fattori (*N*. 48) $a . \frac{1}{x} = b . \frac{1}{c}$, e perciò (§. 195) $a : b = \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$; ma $a : b = a : b$; dunque $x : c = \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$, ossia $a : b = \frac{1}{c} : \frac{1}{x}$; e segnerà questa la proporzione reciproca, ch'è la vera matematica di lei espressione.

325. Per avere il valore del quarto proporzionale nella regola del tre diretta, trovo il valore di x nell' analogia $a : b = c : x$, ed ho $x = \frac{bc}{a}$. Dunque...

TEOR. CIV. *Nella regola del tre diretta si ha il quarto proporzionale in ordine a tre grandezze date, moltiplicando la seconda per la terza, e dividendo il prodotto per la prima* (a).

326. Nella regola poi del tre inversa si ha (§. 194. II.) $x = \frac{ac}{b}$. Dunque...

TEOR. CV. *Nella regola del tre inversa si ha il quarto proporzionale in ordine a tre grandezze date, se il prodotto della prima colla terza si divide per la seconda* (b).

(a) Il valore stabilito di $x = \frac{bc}{a}$ dà due altri modi di valutare il quarto proporzionale, cioè $x = c \times \frac{b}{a}$, ed $x = b \times \frac{c}{a}$. Ma di questi due modi ci serviamo per compendio, quando il secondo, o il terzo termine è esattamente divisibile per lo primo.

(b) Anche quì abbiamo due altri modi, che ci servono di ompendio ne' particolari casi, cioè $x = c \times \frac{a}{b}$, ed $x = a \times \frac{c}{b}$.

327. Quantunque la natura del problema fa decidere, se esso debba sciogliersi colla regola del tre diretta, o inversa; pure riflettendo sull'indole de' differenti problemi, fisso il seguente generale criterio, cioè: *Che se più, o meno nel dato dee produrre più, o meno nella soluzione; i termini dati, ed il cercato sono direttamente proporzionali: Se più, o meno nel dato dee produrre meno, o più nella soluzione; i due primi termini sono reciprocamente proporzionali al terzo, ed al cercato.* Il primo caso capita nella regola del tre diretta, il secondo nella regola del tre inversa, come ne' §§. 325, 326.

328. Ora siccome si determina x quarto proporzionale in ordine ad a, b, c; così si determina anche in ordine ex. gr. ad am, bn, c. Di fatto dovendo essere $am : bn = c : x$, sarà (§.192.125) $x = \frac{bcn}{am}$. Questa è la formola *per la regola del tre composta*, giacchè la prima ragione vien composta dalle due $a : b$, ed $m : n$, (§.204), delle quali considerandosi $m : n$ come una ragione di *tempo*, *spazio* ecc., i suoi termini sono, come *appositorj* a quelli di $a : b$. Dunque . . . .

REGOLA ARITMETICA. Nella regola del tre composta si moltiplicano i termini appositorj coi rispettivi principali, e si opera come nella semplice.

329. Vengo al fatto. Per un parato di Galleria vi mancano 3 canne di stoffa; il costo di 60 canne già comperate è ducati 492, e grana 60; si cerca la spesa delle 3 rimanenti canne.

Quì si vede, che la spesa è più per un maggior numero di canne; dunque il più produce più; e perciò (§.327) la soluzione è diretta. Sarà dunque $60 : 3 = 49260^{grana} :$

$x = (\S.325)\ \frac{147780}{60} = 2463^{grana} = 24 : 63.$

330. Un Negoziante A restituisce ad un altro Negoziante B un prestito di ducati 2400 tenuto per sei mesi, con questo patto di prestargli un simile servizio, quando a lui necessitasse del denaro. Dopo qualche tempo B chiede, secondo la promessa, 4800 ducati ad A: cerco sapere B per quanto tempo deve ritenersi il danaro di A, affinchè esattamente si compensi del primo prestito? In questo caso perchè il denaro, che cerca B, è maggiore di quello, che ha dato ad A, il tempo dev'essere minore; dunque quì il più produce meno; dunque (§.327) la regola è inversa; e perciò $2400 : 4800 = \frac{1}{6} : \frac{1}{x}$, ossia (§.211) $1 : 2 = \frac{1}{6} : \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, ed $x = 3$ mesi,

331. Or se cercasi per quanti giorni 20000 ducati sostenteranno 10000 soldati, essendo bastati 40 ducati al sostentamento di 100 per tre giorni? In questo problema osservo, che il tempo dee crescere, come cresce il denaro da spendersi; e cresce anche il tempo, per quanto è minore il numero de' soldati; dunque la ragione de' tempi di $3 : x$, che si cerca, è nella ragion diretta del denaro (§.327), ed inversa di quella de' soldati; dunque nella ragion composta della diretta della prima, ed inversa della seconda. Che perciò sarà

$$\left.\begin{matrix} 40 : 20000 \\ 10000 : \;\; 100 \end{matrix}\right\} = 3 : x, \text{ ossia (§.204) } 400000 : 2000000 =$$

$3 : x$, ossia (§.211) $4 : 20 = 3 : x$, ed $x = 15$ giorni.

332. Questo è il caso della regola aurea composta, o *del cinque*, come impropriamente i pratici chiamano. Esso poteva anche risolversi con istituire tante regole del tre, per quante ne comporta. Eccone l'applicazione allo stesso problema $100 : 10000 = 40 : 4000$ ducati spesi per 10000 Soldati in tre giorni; quindi $4000 : 20000 = 3 : \frac{3 \times 20000}{4000} = 5 \times 3 = 15$ giorni, come sopra.

Regola di Società.

333. Tutte quelle dimande, nelle quali si tratta dividere a varj associati un guadagno lucrato, o una perdita fatta nello stesso, o diverso tempo, chiamansi problemi di *Società* per l'uso esteso, che hanno nel commercio. La pratica, che si tiene in iscioglierli, è quella, che dico *Regola di Società*. Qualora il tempo è lo stesso per tutti i socj, la società è *semplice*; se il tempo varia, è *composta*.

334. Or dovendo i lucri, e le perdite particolari essere tanto maggiori, per quanto maggiori sono i capitali, ed i tempi, che si tengono impiegati; ne segue, che la regola di società tanto semplice, che composta è fondata su questo criterio: *Dividere un numero dato in un numero di parti date in modo, che sieno tra loro nella ragion semplice, o composta di altrettante grandezze date.*

335. Vengo allo sviluppo di questo criterio. Sieno x, y, z ecc. le parti di un dato tutto t, che indica il guadagno, o la perdita. I termini della prima ragione componente sieno a, b, c ecc., i quali corrispondono al denaro impiegato da ognuno nella società; e della seconda ragione sieno i componenti m, n, r ecc., che segnano la diversità del tempo, nel quale si è impiegato il denaro: vale a dire, che sarà la ragione di $x : y = am : bn$; e quella di $y : z = bn : cr$, e $t = x+y+z$. Quindi alternando le analogie (§. 197) ho $x : am = y : bn$; $y : bn = z : cr$. Dunque sarà $x : am = y : bn = z : cr$, e perciò (N. 210) $am + bn + cr : x + y + z = am : x = bn : y = cr : z$. Quì $am + bn + cr$ non sono, che la somma del denaro di ciascuno moltiplicato per lo rispettivo tempo; ed $x + y + z$ il denaro guadagnato, o perduto; e le altre ragioni sono il denaro, che ha posto ciascuno col suo tempo al quarto

proporzionale, che segna il guadagno, o la perdita fatta nel caso della società composta. Or nella *semplice Società*, perchè m, n, r non vi entrano, sarà . . . $a + b + c : x + y + z = a : x = b : y = c : z$. Dunque

REGOLA ARITMETICA. Nella soluzione de' problemi di società s' istituiscano tante regole auree per quanti sono i socj: la prima ragione sia sempre quella della somma de' denari impiegati al termine, ch' esprime il lucro, o la perdita nella semplice; *e nella* composta *la somma de' prodotti del denaro impiegato da ognuno nel rispettivo tempo riferito al lucro, o alla perdita, come il denaro impiegato da ciascuno al quarto proporzionale nella* semplice; *o il prodotto del denaro di ognuno nel rispettivo tempo al quarto proporzionale nella* composta.

336. Eccone l'applicazione. Due Mercanti *A*, *B* fanno società. *A* ha somministrati 1000 ducati, e *B* 3000; entra un altro *C* in società dopo 4 mesi, e v'impiega 2000 ducati; la società dura da questo tempo per altri due mesi, e si lucrano 1800 ducati: qual'è la porzione di ognuno?

Si rifletta, che *A*, *B* hanno tenuto impiegato il denaro per $4 + 2 = 6$ mesi, nell'atto che *C* lo ha tenuto per 2 mesi; dunque (§.335) sarà $(1000)\,6 + (3000)\,6 + (2000)\,2 = 6000 + 18000 + 4000 = 28000$; e perciò . . . .

$28000 : 1800 = 6000 : \frac{10800}{28} = 385 : 71 : 5\,\frac{4}{28}$ | 1 . . . porzione di A

$28000 : 1800 = 18000 : \frac{32400}{28} = 1157 : 14 : 3\,\frac{12}{28}$ | 1 . . . porzione di B

$28000 : 1800 = 4000 : \frac{7200}{28} = 257 : 14 : 3\,\frac{12}{28}$ | 1 . . . porzione di C

1800 : 00 : 0 guadagno proposto.

Regola di Falsa Posizione.

337. Se si cercasse dividere in tre parti un numero ex. gr. 100 di maniera, che la prima fosse eguale al doppio della seconda, e la seconda tripla della terza; l' Algebra con una sola equazione disbrigherebbe un tal problema (*a*). Ma perchè mi son proposto ricavare le regole aritmetico-pratiche per l' uso del commercio; perciò mi dirigo per altra via.

338. Comunque una grandezza variabile si trovi unita con un' altra, può una sempre determinarsi per mezzo dell' altra con una regola, che in commercio si dice di *Falsa Posizione*, perchè con un numero falso, che si mette di posizione, si determina il vero. Questa operazione ha luogo, ove non può ricavarsi immediatamente il valore di x corrispondente ad un valore qualunque della data m, ed all' opposto sia data la maniera di trovare m corrispondente a qualunque valore di x. Si può anche adoperare spesso una tal operazione, qualora sieno dati ambidue i metodi diretto, ed inverso, ma che il primo sia assai più difficile del secondo. E si avrà tanto più presto il valore cercato, per quanto è maggiore la variazione della grandezza determinante rispetto alla variazione della grandezza cercata.

339. Or se variando m, varia x con eguale, e costante ragione, si trova x con una sola falsa posizione, che fo del suo valore. Suppongo dunque, che il valore di x sia a; e quindi dalle condizioni del problema valuto m dipendente da x, ed avrò p falso valore di m. Ciò

(*a*) Di fatto chiamando la terza x, e la seconda m*cupla* della terza, e la prima n*cupla* della seconda, avrò $100 = x + mx + mnx = (1 + m + mn)x$, ed $x = \frac{100}{1+m+mn} = \frac{100}{1+(1+n)m}$.

fatto, è chiaro, che starà il falso valore p al vero valore di m, come a falso valore di x al vero valore di x; dunque $p : m = a : \frac{am}{p} = x$. Questa formola scioglie tutti i problemi, che immediatamente danno il valore della incognita dopo una posizione, e perciò la regola vien detta di *semplice posizione*. Dunque . . . :

REGOLA ARITMETICA. Nella semplice posizione falsa *si faccia la posizione, e s' istituisca una regola del tre, la quale si diriga a determinare il numero vero.*

340. Sciolgo con questa formola il problema del §.337. Suppongo perciò, che il valore di x sia 2, e nella formola $2 = a$; dunque per le condizioni sarebbe la seconda $=6$, e la prima $=12$; perciò $2+6+12=20=p$; dunque $x = \frac{2.\ 100}{20} = 10$. Di fatto $10+30+60 = 100$.

341. La semplice posizione è venuta per la costante ragione della m, e della x (§.339). Ma se sono in ragion costante le sole differenze della grandezza m, e le differenze della grandezza x, saremo nel caso di due posizioni, ed avremo la regola di *doppia falsa posizione*.

342. Fissiamo il canone a tal posizione. Applico ad a prima posizione di x le condizioni del problema, ed in vece di darmi m, come nella semplice, mi dia p. Do ad x la seconda posizione b, e con questa in vece di giungere ad m, si arrivi ad un altro valore q. Per non andare all'infinito, sieno in ragion costante le differenze (§.342) $p-q$, $a-b$, ed avrò $p-q$ differenza de' valori falsi di m ad $a-b$ differenza de' valori falsi di x, come $m-p$ differenza del primo valore falso di m, cioè p sottratto dal vero valore m, alla grandezza da aggiungersi ad a, per avere il vero valore di x, che chiamo v. Dunque $p-q : a-b = m-p : v = \frac{(a-b)(m-p)}{p-q}$;

e perciò $x=z+v=a+\frac{(a-b)(m-p)}{p-q}$, formola generale pei problemi di falsa doppia posizione.

343. Vengo al fatto. Tre giuocatori hanno guadagnati 47 ducati al giuoco con questa condizione, che il secondo ha avuti 5 ducati più del primo, il terzo 10 più del secondo; si cerca il lucro di ognuno.

Suppongo il guadagno del primo $=4=a$; quello del secondo sarà $=9$, e del terzo $=19$, che fanno $32=p$, e non 47; dunque suppongo di nuovo, che il primo abbia $7=b$, il secondo 12, ed il terzo avrà 22, che fanno $41=q$; ma dovean fare $47=m$; dunque riprendiamo la formola, e sarà il guadagno del primo (§.342) $x=a+\frac{(a-b)(m-p)}{p-q}=4+\frac{(4-7)(47-32)}{32-41}=9$. Dunque le porzioni di ognuno sono $9+14+24=47$.

344. Si cerca l'età di Tito. Questa con quella di Alessandro, e Cajo fa $96=m$. Tito ha due anni di meno di Alessandro, e Cajo ha 4 anni di più dell' età di Alessandro, e di Tito.

Suppongo, che Tito abbia anni $16=a$; dunque Alessandro ne ha 18, e Cajo 38, che fanno la somma di $72=p$. Fo dunque un'altra supposizione, e fingo l'età di Tito$=21=b$; dunque l' età di Alessandro $=23$, quella di Cajo$=48$, e tutte tre $92=q$; dunque riprendiamo la formola (§.342) $x=a+\frac{(a-b)(m-p)}{p-q}=16+\frac{(16-21)(96-72)}{72-92}=16+6=22$, età di Tito; dunque l' età di Alessandro$=24$, e quella di Cajo 50. Di fatto $22+24+50=96$.

345. La soluzione di questi problemi per mezzo della stabilita formola è sempre una soluzione algebrica. Affinchè dunque ricavar si possa una spedita regola pratica per lo commercio, così la discorro sull' antecedente problema. Fatte le posizioni, ho per le condi-

zioni del problema $16+18+38=72$, che dal dato 96 manca per 24; dunque $72=96-24$; così ho anche $21+23+48=92=96-4$. Ora moltiplico la prima posizione per 4, e la seconda per 24 (§.125), ed ho $64+72+152=384-96$; e $504+552+1152=2304-96$. Tolgo dalla seconda la prima, affinchè svanisca il -96(a), ed ho $440+480+1000=1920=20\times96$, ossia . . . .
$96=\frac{440}{20}+\frac{480}{20}+\frac{1000}{20}=22+24+50$, età di ciascheduno secondo le condizioni del problema.
Ciò fatto, rifletto che la grandezza 22 prima vera posizione è la stessa, che $\frac{440}{20}=\frac{504-64}{24-4}=\frac{21\,.\,24-16.\,4}{24-4}$ . . . . ;
Dunque . . . . .

REGOLA ARITMETICA. Ne' problemi di falsa doppia posizione, fatte le posizioni, si moltiplichi ciascuna posizione per l' errore dell' altra: questi prodotti si sommino, se una delle differenze è per eccesso, e l'altra per difetto (N.345), e si sottraggano, se sono ambedue per eccesso, o ambedue per difetto, e'l residuo diviso per la differenza degli errori, se questi hanno gl' istessi segni, o diviso per la somma di essi, se sono affetti da segni diversi, darà la vera posizione, la quale maneggiata secondo le condizioni del problema dà la vera soluzione in tutte le sue parti.

346. Applico questa regola alla determinazione della quantità di argento messa nella corona di oro di Jerone scoverta da Archimede (b). Suppongo, che il peso dell' argento, e dell' oro unito nella corona fosse di 12

(a) Dunque se i 96 fossero affetti ambidue dal segno +, dovrei far anche lo stesso, perchè svanissero; ma essendo i segni diversi, in tal caso adopro la somma in vece della sottrazione.

(b) Vitruvio nel Cap. 3. lib. 9. riferisce la storia della scoverta, che fece Archimede di questo furto.

libbre, e che immersa questa nell'acqua sollevasse $7+\frac{4}{5}$ dell'acqua stessa sopra il suo livello; e che una massa di oro di ugual peso alla corona ne cacciasse libre $7+\frac{1}{5}$, ed un' altra di argento di ugual peso ne cacciasse libbre $10+\frac{4}{5}$. Suppongo, che vi sieno 9 libbre di oro puro; dunque ve ne saranno 3 di argento puro. Ciò posto, dico; sta di puro oro libbre $12:7+\frac{1}{5}=9:5+\frac{2}{5}$ (§. 194. 1). Similmente sta di puro argento libbre $12:10+\frac{4}{5}=\ldots$ $3:2+\frac{7}{10}$ (§. 194. 1); il sollevamento dunque dell' acqua è $=5+\frac{2}{5}+2+\frac{7}{10}=8+\frac{1}{10}$; ma doveva essere $7+\frac{4}{5}$; dunque l' errore è per eccesso $+\frac{3}{10}$.

Fo la seconda posizione con 8 libbre di oro puro, e 3 di puro argento; e ragionando, come sopra, trovo l' errore anche per eccesso $+\frac{6}{10}$; dunque (§. 345) sarà $9(\frac{6}{10})-8(\frac{3}{10})=3$, il quale diviso per $\frac{6}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$, darà $\frac{30}{3}=10$ libbre di oro, e perciò 2 di argento (*a*).

(a) L' uso delle false posizioni è frequentissimo nel genere delle tavole, ossieno astronomiche, o trigonometriche, o logaritmiche. Di fatto se si riflette al metodo tenuto nella teoria logaritmica §. 321 per la determinazione del numero corrispondente ad un dato logaritmo, si troverà ivi con questo principio la falsa posizione, ma altrimenti ragionata; perchè verità ritrovata preventivamente a queste cognizioni.

Regola di Allegazione.

347. Il metodo di proporzionare diverse specie di sostanze date relativamente all' unità de' pesi ne' solidi, o all' unità di misura ne' fluidi, per comporre una sola sostanza di specie mista, chiamasi *Allegazione.* Il valore speciale dell' unità di ogni particolare specie dicesi *prezzo vero* di quella data specie. Il valore poi dell' unità dell' intero misto chiamasi *prezzo medio* di quel misto.
Se l' *Allegazione* riguarda il misto delle quantità considerate come semplici, e non mescolate con altre, cioè che sieno dello stesso genere, dicesi *semplice*: se riguarda la *mistione* delle fatte misture de' semplici, dicesi *composta.*

348. La quantità mista pareggia l' unione di tutte le quantità date a mischiarsi; il prezzo totale della mistura pareggia la somma de' prezzi totali di ciascuna quantità data, ed il prezzo totale di qualunque quantità pareggia il prezzo vero della sua specie, ossia il prezzo di un' unità di misura di quella data specie moltiplicato per lo numero delle stesse misure. Fissato questo raziocinio, chiamo la somma di tutte le quantità date a mischiarsi$=s$, la somma de' prezzi loro totali$=p$, l' unità di misura$=1$, ed il prezzo medio$=x$, ed ho $s : p = 1 : x$, ed $x=\frac{p}{s}$, che chiamo valore della *semplice allegazione media*. Dunque . . . .

REGOLA ARITMETICA. Si risolve il problema di semplice allegazione media, se la somma de' prezzi totali si divide per la somma di tutte le quantità date a mischiarsi.

349. Volete di fatto sapere, quanto la libbra costi una statua di 300 libbre di argento, delle quali 120

libbre si son pagate a ducati 30 la libbra, e 180 a ducati 25 la libbra?
Sarà $p=120\times30+180\times25=8100$; ed $s=120+180=300$; dunque (§.348) $x=\frac{p}{s}=\frac{8100}{300}=27$ ducati la libbra.

350. Or se ci son dati i prezzi veri a, b di due sostanze date a mischiarsi, ed $a=b$; il prezzo medio m della misura pareggia il prezzo vero di ciascuna sostanza mista. Ma se $a>b$, dovendo in questo caso la mistura esser inferiore in bontà alla più preziosa, che nel nostro caso è a, e superiore in bontà alla meno preziosa b; il prezzo vero della mistura dev' esser maggiore del prezzo vero di una, e minore del prezzo vero dell' altra. Per esaminare questo secondo caso, la discorro così. Sieno A, B le specie componenti M; e sieno a, b i disuguali prezzi veri corrispondenti ad x, y rispettive parti di A, B, che unite insieme compongono M del costo m. Il prezzo totale di ciascun misto è ax, by; dunque $ax+by=m$, ed $x+y=1$ libbra; che perciò $x=\frac{m-by}{a}$, il qual valore sostituito nella seconda equazione dà $y=\frac{a-n}{a-b}$, ed $x=\frac{m-b}{a-b}$ (a), e perciò $a-b:1=a-m:y$, ed $a-b:1=m-b:x$. Dunque . . . .

REGOLA ARITMETICA. Dati nell'allegazione i disuguali prezzi veri delle quantità cercate delle due specie, e 'l prezzo medio della mistura, si ha la quantità da prendersi di ciascuna specie con un quarto proporzionale in ordine alla somma delle differenze

(a) Avendo i valori di x, y lo stesso denominatore, saranno come i numeratori (§.203); dunque la quantità da prendersi da una sostanza è sempre, come la differenza tra il prezzo medio e 'l prezzo vero dell' altra, colla quale si liga. Che perciò la porzione spettante ad x è $m-b$, quella di y è $a-m$.

de' prezzi veri dal medio (a) *all' unità di misura, ed alla differenza del prezzo vero dell' altra specie dal prezzo medio.*

351. Ma se oltre i componenti A, B ci entra anche il componente C del prezzo c per ogni libbra, allora date le stesse denominazioni di sopra, chiamo z la parte da prendersi da C, e supponendo $m < a$, $m > b$, $m > c$, ed allegando x con y, avrò (§.350) $x = \frac{m-b}{a-b}$, $y = \frac{a-m}{a-b}$; onde la porzione di x è $= m-b$ (N. a §.350), quella di y è $=$ $a-m$. Dunque sarà $(a-m)\, x = (m-b) y$, ossia $\frac{a-m}{y} = \ldots$ $\frac{m-b}{x}$. Fo l' allegazione di x con z, ed ho $\frac{m-c}{x} = \ldots$ $\frac{a-m}{z}$; sommo queste colle allegazioni di x, y, ed ho .. $\frac{m-b+m-c}{x} = \frac{a-m}{z} + \frac{a-m}{y}$; dunque (Nota a §. 350) è la porzione corrispondente . . . . . .
ad x . . . . $(m-b)+(m-c)$.
ad y . . . . $a-m$.
a z . . . . $a-m$.

352. Che se poi $m < a$, $m < b$, $m > c$, allora alle-

(a) Questa espressione della pratica quantunque a prima vista sembri aliena da ciò, che segna la formola, pure svanisce ogni dubbio, se si riflette, che tanto è dire la differenza tra due numeri dati, quanto la somma delle differenze di ciascuno de' numeri dati da un numero qualunque medio preso tra essi.
Con più speditezza però, e meno incomodo di calcolo avrebbero potuto gli Aritmetici così enunciare la regola pratica : *Nell' allegare due sostanze la porzione di ognuna pareggia il numero espresso dalla differenza del prezzo vero dell' altra dal prezzo medio.*

gando x con z, e y con z, e sommando l' equazioni, come sopra, avrò la porzione corrispondente (N. *a*. §. 350)

a z . . . . $(a-m)+(b-m)$.
ad y . . . . $m-c$
ad x . . . . $m-c$

353. Le diverse supposizioni di m . . . .
I. Si son fatte per inchiudere sempre il prezzo medio m tra i due prezzi veri, uno maggiore, e l' altro minore.
II. in ogni supposizione di m si son fatte a due a due le allegazioni, per avere due sorti di misture, ognuna ridotta al prezzo medio.
III. Qualunque sia il numero delle sostanze da allegarsi, se esse sono di numero pari, si liga la prima colla seconda, la terza colla quarta, la quinta colla sesta ecc.; se sono di numero dispari, se ne lascia una, e si ligano, come se fossero pari, e la sostanza lasciata si liga con una delle altre.
IV. Il prezzo medio dev' esser sempre maggiore di un prezzo vero, ma minore di un altro; e la somma delle particolari allegazioni dee pareggiare la totale allegazione cercata.

354. Che se poi si cercano allegare due o più sostanze in modo, che le sostanze miste conservino in ciascuna una data ragione tra loro nella nuova mistura; siamo nel caso dell' allegazione composta (§.347). Fissiamone le tracce. Mi propongo tre misture D, E, F, ciascuna delle quali venga composta da tre diverse sostanze A, B, C in una data ragione, e di queste miste e confuse insieme cerco farne una nuova mistura M in ragion data. Nella mistura D ci sieno le porzioni a di A, b di B, c di C; nella mistura E ci sia d di A, e di B, f di C; nella mistura F ci sia g di A, h di B, l di C; finalmente nella mistura M ci sia la quantità m di A, n di B, p di C. Or sarà $D=a\,A+b\,B+c\,C$; $E=d\,A+e\,B+f\,C$; $F=g\,A+h\,B+l\,C$. Affinchè poi si formi la massa M;

chiamo x la quantità da prendersi da D, quella da prendersi da E dicasi y, e la porzione finalmente di F sia z; ed avrò $x D + y E + z F = M = m A + n B + p C$. Indi essendo $xD = xaA + xbB + xcC$, ed $yE = ydA + yeB + yfC$, e $zF = zgA + zhB + zlC$, avrò riducendo . . . .

$$\left.\begin{matrix} xa \\ yd \\ zg \end{matrix}\right) A + \left.\begin{matrix} xb \\ ye \\ zh \end{matrix}\right) B + \left.\begin{matrix} xc \\ yf \\ zl \end{matrix}\right) C == mA + nB + pC.$$

Dovendo essere la quantità di A, B, C, che sta in M, rispettivamente uguale alla somma delle parti, che si prendono dalle date misure ; e perciò essendo le stesse le grandezze principali nell' uno, e nell' altro membro della equazione, saranno i loro coefficienti rispettivamente uguali, cioè $xa + yd + zg = m$, $xb + ye + zh = n$, $xc + yf + zl = p$. Si sciolgano quest' equazioni (§. 127), e fatto quindi $bm - an = q$, $ah - bg = r$, $bd - ae = s$, $cn - bp = t$, $bl - ch = u$, $ce - bf = \omega$, si avrà $x = \frac{m - dy - gz}{a}$, $y = \frac{qu - rt}{su - t\omega}$, $z = \frac{\omega q - st}{su - r\omega}$, formole generali per tali problemi.

355. Vengo al fatto. Ho tre misture D, E, F di oro, di argento, e di piombo. D contiene once 12 di oro, 1 di argento, e 3 di piombo: contiene E once 1 di oro, 12 di argento, 3 di piombo: finalmente F contiene 14 once di argento, 2 di piombo, e zero di oro. Si cerca di queste un misto, che contenga 4 once di oro, 9 di argento, e 3 di piombo. Nelle formole del §. 354 sostituisco alle grandezze i numeri, ed ho $a = 12$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 1$, $e = 12$, $f = 3$, $g = 0$, $h = 14$, $l = 2$, $m = 4$, $n = 9$, $p = 3$; quindi $q = -104$, $r = 168$, $s = -143$, $t = 24$, $u = -40$, $\omega = 33$; dunque $z = 0$ della mistura F, $y = \frac{8}{11}$ della mistura E, ed $x = \frac{3}{11}$ della mistura D.

LEZIONE XXI.

Le Funzioni della Grandezza discreta applicate al Politico.

356. Quì mi propongo trattare l'accrescimento, o la diminuzione, che una data grandezza aver possa in un dato tempo con una data legge. E perchè a questo si riducono tutte le sorti d'interessi, ed i calcoli dell'accrescimento, e della diminuzione delle popolazioni, e derrate, proporzionandole sempre con una data legge ad un dato tempo, perciò li chiamo *Calcoli Politici*.

357. Una grandezza A suppongasi accresciuta di $\frac{A}{m}$ alla fine di un dato tempo, e continui poi successivamente a crescere in simil guisa sino ad un qualunque tempo t. Alla fine del primo tempo la grandezza sarà $A+\frac{A}{m}=..A(1+\frac{1}{m})=A(\frac{m+1}{m})$; ma questa alla fine del secondo tempo si accresce anche della sua parte $\frac{1}{m}$; dunque tal aumento sarà $A(\frac{m+1}{m^2})$, e la grandezza col suo aumento sarà $A(\frac{m+1}{m})+A(\frac{m+1}{m^2})=A(\frac{m+1}{m}+\frac{m+1}{m^2})=A(\frac{m^2+2m+1}{m^2})=..A(\frac{m+1}{m})(\frac{m+1}{m})=A(\frac{m+1}{m})^2$. Così ragionando, si troverà che alla fine del terzo tempo sarà divenuta $A(\frac{m+1}{m})^3$, alla fine del quarto $A(\frac{m+1}{m})^4$, ed alla fine di un tempo t sarà divenuta $A(\frac{m+1}{m})^t$. Collo stesso raziocinio si dimostra, che colla decrescenza di $\frac{1}{m}$, determinata dalla stessa legge, giugne ad essere $A(\frac{m-1}{m})^t$ alla fine dello stesso tempo t;

e perciò sarà $A\left(\frac{m\pm1}{m}\right)^t$ la formola generale per la crescenza o decrescenza di una grandezza qualunque nel tempo t con una data legge. Dunque . . . .

TEOR. CVI. *Se una grandezza A cresce, o decresce di $\frac{A}{m}$ alla fine di un dato tempo, e continua similmente a crescere, o decrescere colla stessa legge, essa dopo un tempo qualunque t diviene $A\left(\frac{m\pm1}{m}\right)^t$.*

358. Mi servo della formola della crescenza $A\left(\frac{m+1}{m}\right)^t$ pel disbrigo del calcolo, e rifletto in essa, che ci può essere ignota A, oppure m, oppure t: Eccoci alla soluzione di altrettanti problemi dipendenti dalla formola generale stabilita nel paragrafo antecedente.

Sia $A\left(\frac{m+1}{m}\right)^t = F$, la maneggio secondo le regole, ed ho..

I. $A = F\left(\frac{m}{m\pm1}\right)^t$.

II. $m = \pm\frac{1}{\left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$.

III. $t = \frac{\mathrm{l}F - \mathrm{l}A}{\mathrm{l}(m\pm1) - \mathrm{l}m}$.

359. Se poi trattasi di Capitali, si avranno le formole:

I. $A = F\left(\frac{100}{100+p}\right)^t$.

II. $p = 100\left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{t}} - 100$.

III. $t = \frac{\mathrm{l}F - \mathrm{l}A}{\mathrm{l}(100+p) - \mathrm{l}100}$.

Si maneggi nella stessa guisa la formola della decrescenza, e si avranno altrettanti problemi (a).

360. Se alla grandezza A, oltre il crescere, come nel §.357, si suppone aggiunta una costante B, che continuamente con A cresca nella stessa guisa; in tal caso A nella fine del primo tempo diventa $A\left(\frac{m+1}{m}\right)+B$, e seguitando a crescere della sua parte $\frac{1}{m}$, ed aggiungendole B, sarà nella fine del tempo secondo, terzo, e quarto....

$$A\left(\frac{m+1}{m}\right)^4+B\left(\frac{m+1}{m}\right)^3+B\ldots\text{ ecc.}$$
$$+B\left(\frac{m+1}{m}\right)^2$$
$$+B\left(\frac{m+1}{m}\right)$$
$$+B\ldots\ldots\text{ ecc.}$$

e facendo $\frac{m+1}{m}=n$, avremo alla fine del tempo t

$$An^t+Bn^{t-1}+B\ldots\text{ ecc.}$$
$$+Bn^{t-2}$$
$$+Bn^{t-3}$$
$$+B\ldots\text{ ecc.}$$

Ma la serie infinita delle grandezze $n^t+n^{t-1}+n^{t-2}+\ldots n^{t-3}$ ecc. si vede pareggiare $\frac{n^t-1}{n-1}$ (§. 244); dunque la

---

(a) Trattandosi di Capitali se l'annuale interesse è al p per 100, la formola si trasformerà in $A\left(\frac{100+p}{100}\right)^t$ più spedita a maneggiarsi. In fatti se l'interesse è al 4 per 100, avremo $A\left(\frac{104}{100}\right)^t=A\left(\frac{26}{25}\right)^t$; se al 5 per 100, sarà $A\left(\frac{105}{100}\right)^t=\left(\frac{21}{20}\right)^t$, e così del resto.

grandezza A colle supposte condizioni nel tempo t sarà $= An^t + B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) + B$. Così se da A si togliesse colla stessa legge B grandezza minore, si avrebbe $An^t - B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) - B$. Dunque....

TEOR. CVII. *Se alla grandezza A, che continuamente cresce dalla parte $\frac{1}{m}$, si aggiungesse, o togliesse una costante B, minore però di A nel secondo caso, la quale B continuamente insieme con quella cresca, o decresca nella stessa guisa, tal grandezza alla fine del tempo t sarà $= An^t \pm B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) \pm B$.*

361. In questa formola possono darsi separatamente ignote le grandezze A, B, t, n. Ed ecco in campo una multiplicità di problemi, a maneggiare i quali suppongo primieramente $An^t - B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) - B = F$; onde sarà $An^t = F + B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) + B$, ed $A = \frac{F + B\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) + B}{n^t} = \ldots\ldots$

$$\frac{F + B\left(\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) + 1\right)}{n^t}.$$

362. Nell' antecedente formola sia B ignota, ed ho $An^t - F = B\left(\left(\frac{n^t-1}{n-1}\right) - 1\right) = B\left(\frac{n^t-1-n+1}{n-1}\right) = B\left(\frac{n^t-n}{n-1}\right)$; e perciò $B = (An^t - F)\left(\frac{n-1}{n^t-n}\right)$.

363. Se l' ignota è t, allora moltiplicando l'equazione $An^t - B\left(\frac{n^t-n}{n-1}\right) = F$ per $n-1$, avrò $(n-1)An^t - Bn^t + Bn$

$= (n-1)\,F$; ed $n^t((n-1)\,A-B) = (n-1)\,F-Bn$, ed $n^t = \frac{(n-1)\,F-Bn}{(n-1)\,A-B}$; e prendendo i logaritmi (§.289), sarà $t\,\mathrm{l}n = \mathrm{l}((n-1)\,F-Bn) - \mathrm{l}((n-1)\,A-B)$; e finalmente $t = \frac{\mathrm{l}((n-1)\,F-Bn)-\mathrm{l}((n-1)\,A-B)}{\mathrm{l}\,n}$.

364. Restituisco ora alla formola di sopra (§.360) il valore di $n = \frac{m+1}{m}$, e coi metodi della scienza stabilisco le seguenti formole pei valori di A, B, t (a).

$$\text{I. } A = \frac{F + B\,m\left(\frac{m+1}{m}\right)^t - B\,(m-1)}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^t}$$

$$\text{II. } B = \frac{\left(A\left(\frac{m+1}{m}\right) - F\right)}{\left(m\left(\frac{m+1}{m}\right)^t - (m-1)\right)}$$

$$\text{III. } t = \frac{\mathrm{l}\left(\frac{F}{m} - B\left(\frac{m+1}{m}\right)\right) - \mathrm{l}\left(\frac{A}{m} - B\right)}{\mathrm{l}\left(\frac{m+1}{m}\right)}$$

(a) Basta riflettere per lo stabilimento di questi tre valori, che essendo $n = \frac{m+1}{m}$, sarà $n - 1 = \frac{m+1}{m} - \frac{m}{m} = \frac{1}{m}$; e perciò

$$\frac{n^t-n}{n-1} = n\left(\frac{n^{t-1}-1}{n-1}\right) = \frac{\frac{m+1}{m}\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^{t-1}-1\right)}{\frac{1}{m}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(m+1)\left(\left(\frac{m+1}{m}\right)^{t-1}-1\right) = (m+1)\left(\frac{m+1}{m}\right)^{t-1} - (m+1).$$

365. Or facendo $F=o$, il che accade nella estinzione de' debiti a scalare, avrò le seguenti formole ...

$$\text{I. } A=\frac{Bm\left(\frac{m+1}{m}\right)^t - B(m-1)}{\left(\frac{m+1}{m}\right)^t}$$

$$\text{II. } B=\frac{A\left(\frac{m+1}{m}\right)}{\left(m\left(\frac{m+1}{m}\right)^t-(m-1)\right)}$$

$$\text{III. } t=\frac{l\left(B\left(\frac{m+1}{m}\right)\right)-l\left(B-\frac{A}{m}\right)}{l\left(\frac{m+1}{m}\right)}$$

366. Vengo all'applicazione. « Una popolazione cre-
» sce annualmente della sua centesima; si cerca dopo
» quanti anni diverrà decupla? »
Quì si chiede il tempo; dunque ricorro alla formola terza del §.358: e chiamando la popolazione $=A$, il numero richiesto degli anni $=t$, $m=100$, sarà $F=10A$; e perciò

$$t=\frac{lF-lA}{l(m+1)-lm}=\frac{l\frac{10A}{A}}{l101-l100}=\frac{l\,10}{l101-l100}=\frac{10000000}{43214}=231$$

anni cercati.

367. Quindi dopo 462 anni si farà cento volte maggiore, e dopo 693 anni si farà mille volte maggiore.

« 368. Dopo il diluvio sei persone propagarono il
» genere umano, e dopo due secoli supponiamo, che
» la popolazione divenisse di 1000000 persone; si cerca
» l' annuo accrescimento. »
Quì si dimanda m; dunque si deve ricorrere alla seconda formola §.358, ed avrò $A=6$, $F=1000000$, $t=200$; ed

$$m = \pm \overset{1}{\overline{\left(\frac{F}{A}\right)^{\frac{1}{t}}}} - 1 = \overset{1}{\overline{\left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{100}}}} - 1 = \overset{1}{\overline{\frac{1}{200}\, l\left(\frac{1000000}{6}\right)}} - 1$$

$$= \overset{1}{\overline{\frac{1}{200}(l\,1000000 - l\,6)}} - 1 = \overset{1}{\overline{\frac{1061963}{1000000}}} - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\frac{1000000}{1061963 - 1000000} = \frac{1000000}{61963} = 16$. Dunque l' incremento è di quasi una decima sesta parte della popolazione.

369. Or se un tale accrescimento fosse durato per lo spazio di 400 anni, il numero degli uomini sarebbe giunto a $1000000 \times \frac{1000000}{6} = 166666666666$ tutti viventi, ai quali posta la loro lunga età non sarebbe bastato tutto il continente per alimentarli.

LEZIONE XXII.

Le Funzioni della Grandezza discreta applicata ai Probabili.

FONDAMENTI DEL CALCOLO.

370. Con improprio vocabolo chiamo *fortuito*, o *casuale* un successo, di cui se ne ignorano le cagioni, che possono produrlo. Per l' esistenza, o non esistenza di due casuali successi, uno de'quali dee necessariamente accadere, non troviamo in noi altra ragione, per cui uno debba piuttosto accadere, che l'altro, se non che alcune circostanze favorevoli, o svantaggiose, le quali ci fanno piuttosto piegare verso l' uno, che l' altro. Un rapporto dunque de' casi favorevoli alla somma de' favorevoli, e contrarj ci mette in una certa credenza più per ol successo dell' uno, che dell' altro. Chiamo questo rap-

porto *Probabilità*. Una porzione dunque di requisiti alla verità forma il *probabile*, e dalla somma di tutti si forma la *certezza* (a). Dicesi perciò giudicare *probabilmente*, quando da alcuni requisiti alla verità si giudica della esistenza, o non esistenza della cosa.

371. Diciamo *sapere*, *o capire* le cose certe, ed indubitate, e *congetturare*, *o sospettare* tutte le altre. Diciamo congetturar qualche cosa, qualora ne misuriamo la sua *Probabilità*. Dunque il *congetturare* altro non è, che il modo di misurare per quanto è possibile con esattezza la probabilità della cosa, a solo fine di scegliere ne' giudizj, o di eseguire nelle nostre azioni il migliore, ed il più sicuro. Ch' è ciò, in cui consiste la scienza del Filosofo, e la prudenza del Politico (*b*).

372. L' esistenza di tre avvenimenti, che vicende-

(a) Giacomo Bernoulli nel §. IV. Cap. I. dell' Arte di Conjetturare dice, che la *certezza* o si prende per la verità della esistenza presente, ovvero futura della cosa, o si valuta per la misura della nostra cognizione circa una data verità.
La *probabilità* poi essendo un grado della certezza, differisce da questa, come la parte dal tutto. Dunque di tanto una cosa è più probabile dell' altra, per quanto esaurisce maggiori gradi di certezza. Ecco perciò che chi è vicino alla metà de' gradi di certezza, è nel dubbio.

(b) Dopo che Cartesio applicò l' Algebra alla Geometria, ed il Newton applicò ambedue alla Fisica, estese l' Algebra il suo dominio in tutta quanta la corporea natura. Ma sembrandole ciò picciolo campo alla vastità della sua estensione, con un volo più ardito s' innalzò essa sopra de' suoi simboli, e penetrò con felice successo le incoguite, ed intentate regioni della *eventualità*. L' infinito numero dunque de' fortuiti avvenimenti, le innumerabili combinazioni de' giuochi di sorte, e di azzardo, e tutto ciò che impropriamente dicesi soggetto all' impero della *Fortuna*, è oggi un ricco patrimonio di conquista dell' Algebra. Il famoso Olandese Huyghens diede i primi passi per la mirabile *Arte di Conjetturare*, detta anche *Dottrina della Sorte*, e *Cal-*

volmente si escludono, mentre un solo di essi dee certamente esistere, si riguarda come egualmente probabile, non essendovi ragione, per cui più tosto debba esistere il primo, che il secondo, questo piuttosto che il terzo; che anzi è più *probabile* la non esistenza, che l' esistenza di ciascuno, perchè la probabilità in questo caso è $= 2 : 1$; vale a dire, che nei tre casi possibili la non esistenza ne ha 2 in suo favore, e l' esistenza 1.

373. Affinchè rettamente si giudichi della probabilità di un evento, bisogna valutare il *numero*, e l' *intensità* degli argomenti (*a*), che provano, o indicano essere

---

colo de' Probabili. I più sublimi Geometri dopo di lui invitati da' suoi felicissimi progressi non si trattennero più sulla probabilità di un evento, o di un' aspettativa, sulla speranza di un guadagno, o sul pericolo di una perdita; ma prendendo di mira la vita sociale e domestica, vollero regolare tutte le sorti di stipule, e contratti, che dalla verisimile durata della vita dipendono. Ecco la scienza de' probabili sollevata al più sublime grado delle Matematiche discipline, nel quale essa giugne a giudicar anticipatamente de' gradi della probabilità della vita, e del pericolo della morte per tutte l' età, e condizioni; assegnando all' evento della umana caducità la giusta valuta della speranza, e del timore. Giustamente perciò un gran Geometra della nostra età volendole dare una vantaggiosa applicazione, ha nella Criminale Giurisprudenza introdotto con successo il Calcolo de' Probabili.

(a) Gli argomenti o sono intrinseci, o estrinseci. I primi si prendono dalla cagione, dall' effetto, dal soggetto, da' segni, o da qualunque intrinseca proprietà della cosa, e i secondi dal testimonio, e dall' autorità degli uomini. Così trovandosi Tizio ucciso per istrada, se ne accusa Mevio. Quali sono gli argomenti, che provano ciò? L' odio di Mevio verso Tizio; ecco l' argomento dalla *causa*. Esaminato Mevio, si dimostrò pallido, e timido; ecco l' argomento dall'*effetto*. In casa di Mevio si è trovato un coltello intinto di *sangue*; ecco l' argomento dal *segno*. Il giorno dell' omicidio fu veduto Mevio passar da quel luogo; ecco l' argomento dalle *circostanze* del luogo, e tempo. Un terzo depone, che il giorno prima dell' omicidio rissarono Tizio, e Mevio; ecco l' argomento da' *testimonj*.

stata la cosa, o essere presentemente, o che verrà all' esistenza.

Quindi è, che le probabilità della esistenza, o non esistenza di un evento sono tanto maggiori o minori, per quanto direttamente è più grande, o più piccolo il numero de' casi a lei favorevoli, o contrarj, e per quanto reciprocamente è più piccolo, o più grande quello de' casi possibili; dunque chimando p la probabilità, il numero de' casi favorevoli f, e quello de' contrarj c, avrò la probabilità $p = f(\frac{1}{f+c}) = \frac{f}{f+c}$. Dunque . . . . .

TEOR. CVIII. *La probabilità di un evento è espressa dalla formola* $p = \frac{f}{f+c}$.

374. Quindi per la probabilità in contrario avrò $p' = \frac{c}{f+c}$.

375. Fissata la probabilità, si determina la *speranza* degl' interessati per l' esistenza di un qualche avvenimento. La speranza prende il suo valore o dalla stima intrinseca dell' oggetto, o da una stima di affezione del medesimo oggetto, che si spera, e dalla probabilità di ottenerlo; dunque chiamando la speranza s, l' oggetto o, avrò $s = o\frac{f}{f+c} = op$ (§.373). Dunque . . .

TEOR. CIX. *La speranza di un evento si valuta colla formola* $s = op$.

376. Or tutti i casi possibili (*a*) di un evento si formano dalla somma de' casi favorevoli e contrarj; dunque $p+p' = \frac{f}{f+c} + \frac{c}{f+c} = \frac{f+c}{f+c} = 1$, ch' è il caso della *certezza* (§.370). Dunque. . . .

(a) Un piccolo grado di certezza forma la possibilità.

TEOR. CX. *La certezza di un evento si ha dal concorso di tutti i possibili all' unità di esso* (a).

Contratti di Azzardo.

377. Affinchè sia giusto un contratto, debbono essere ugualmente pregevoli il prezzo, e la cosa, che si contratta; dunque chiamando il prezzo p, sarà $p=s=\frac{of}{f+c}$ (§.375); e perciò $f+c : f=o : p$. Dunque . . . .

TEOR. CXI. *Ne' contratti di azzardo, affinchè si abbia l'uguaglianza, deve stare la somma de' casi favorevoli e contrarj a' favorevoli, come l' oggetto al prezzo.*

378. Or se $f=c$, sarà $o : p=f+c : f=2c : c=$(§.211) $2 : 1$; ed $o=2p$, e $p=\frac{o}{2}$. Dunque . . . .

TEOR. CXII. *Ne' contratti di azzardo se il numero de' casi favorevoli pareggia quello de' casi contrarj, la cosa, ch' è in contratto, dee pagarsi per metà.*

379. Quindi secondochè varia il rapporto di c ad f, si avranno i diversi valori di o, e di p. Infatti . . .

I. Sia $f=2c$, sarà $o: p=f+c : f=3c : 2c=3 : 2$; e perciò $o=\frac{3}{2}p$, $p=\frac{2}{3}o$.

II. Sia $f=3c$, sarà $o: p=f+c : f=4c : 3c=4 : 3$; e perciò $o=\frac{4}{3}p$, $p=\frac{3}{4}o$.

III. Sia $c=2f$, sarà $o : p=f+c : f=3f : f=3 : 1$; e perciò $o=3p$, $p=\frac{o}{3}$.

IV. Sia $c=3f$, sarà $o: p=f+c : f=4f : f=4 : 1$; e perciò $o=4p$, $p=\frac{o}{4}$.

(a) Questo è il fondamentale teorema per gli azzardi.

380. Se più sono i concorrenti, ed in conseguenza più i prezzi in un contratto di azzardo, essendo (§.377) $p=\frac{of}{f+c}$, per un altro prezzo p' sarà $p'=\frac{of'}{f+c}$; dunque avrò $p:p'=f:f'$.

381. Tra due contraenti A, B dia A il prezzo p all' altro B, affinchè da questo riceva o. Essendo f i casi favorevoli di A, e c i contrarj, sarà (§.377) $p:o=f:f+c$. Dovendo poi B dare o, per ricevere p, tutti i casi favorevoli di A saranno contrarj a B, ed i contrarj saranno favorevoli; dunque per B esprimerà c i casi favorevoli, ed f i contrarj; e quindi per B dovrà essere $o:p=c:c+f$. Dunque per A sarà $p=\frac{of}{f+c}$, e per B sarà $o=\frac{pc}{c+f}$; e perciò $p:o=\frac{of}{f+c}:\frac{pc}{c+f}=of:pc$; onde sarà (§.192) $p^2c=o^2f$, e perciò (§.195) $f:c=p^2:o^2$. Dunque . . . .

TEOR. CXIII. *Tra due contraenti sono i casi favorevoli di chi dà il prezzo ai favorevoli di chi dà l' oggetto, come il quadrato del prezzo al quadrato dell' oggetto sperato.*

Probabilità Composta.

382. La probabilità, che si ha da un mazzo di carte da giuoco, se da esso se ne tira una di bastoni, è (§.373) $p=\frac{10}{30+10}=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$, essendo 10 le carte di bastoni, e 30 le altre nel rimanente del mazzo. Ma se cercasi il Re di bastoni, in questo caso, perchè 10 sono le carte di bastoni, $\frac{1}{4}$ di probabilità trovato dee dividersi a 10, ossia la probabilità sarà $=\frac{1}{40}$; vale a dire che avrò un caso favore-

vole, e 39 contrarj. Questo è il caso della *probabilità composta*, quando cioè concorrono due, o più probabilità semplici, ed altro non si fa, che moltiplicare le stesse probabilità semplici.

383. Coll' esame di tutti i casi favorevoli e contrarj si può la probabilità composta ridurre a semplice. Parte un amico sopra una flotta di 12 Vascelli. Si ha notizia, che 3 di questi sieno affondati, e che il terzo dell' equipaggio de' Vascelli salvati sia morto nel viaggio; qual sarà la probabilità per la morte, o vita del mio amico (*a*)?
Calcolate così. Essendo 9 i rimasti Vascelli, può l'ami-

(a) Si sono i Matematici affaticati in rintracciare la più lunga durata della vita dell' uomo, e dopo alcune tracce, che sulla *Curva della Mortalità* ci lasciò Cheseaux nelle sue Memorie postume, e d' Alembert ne' suoi opuscoli Matematici, troviamo segnalato in tal soggetto il Signor Lambert. Questi nel tomo primo de' suoi Miscellanei Matematici consultando i registri della mortalità in Londra dal 1753. sino al 1758., costruisce per tal luogo la curva della mortalità, nella quale le ascisse x rappresentano gli anni dell' età, e le ordinate corrispondenti y segnano il numero de' viventi in ciascuna età. Quindi assumendo un' equazione indeterminata, per esprimere l'arco della curva, che intercettano due ordinate, l' una ai 45 anni, da dove fa aver origine alle ascisse sull' asse della curva, e l' altra ai 50 anni, ritrova i valori de' coefficienti, cioè $A = 26950$; $B = -985, 7$; $C = 9, 70915$; $D = -0, 03427$; $E = -0, 0027017$; $F = 0, 000066635$ ecc.; e perciò l' equazione per un tal dato arco è $y = 26950 - 985, 7x + 9, 70915x^2 - 0, 03427x^3 - 0, 0027017x^4 + 0, 000066635x^5$ ecc. Questi furono i primi passi, che questo infaticabile Geometra diede sulla curva della mortalità.
Nel terzo tomo poi della stessa opera rintraccia la legge della mortalità dal principio della vita sino a 95 anni, e per assegnare l' equazione alla curva in tutto il suo perimetro, combina una Parabola, e due Logistiche, e giunge all' equazione esponenzia-

co esser sopra uno di questi; dunque i casi favorevoli saranno 9, e 3 i contrarj; dunque la probabilità è (§.373) $p = \frac{9}{12}$. Il terzo dell'equipaggio di questi Vascelli è morto; ma l' amico potea trovarsi ne' $\frac{2}{3}$ de' vivi; dunque i casi favorevoli per la sua vita sono per quest' altro capo $\frac{2}{3}$, ed i contrarj $\frac{1}{3}$; dunque la probabilità della sua vita per questo riguardo è (§.373) $p' = \frac{2}{3}$ diviso per $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$ eguale a $\frac{2}{3}$, e l'intera probabilità della vita medesima verrà espressa da (§.382) $p \times p' = \frac{9}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Dunque l'amico è tra la morte, e la vita (a).

---

le $y = 10000 \left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176 \left(e^{-\frac{x}{13.682}} - e^{-\frac{x}{2.43114}}\right)$ per la curva della mortalità.

Nel secondo tomo degli Atti Elvetici lo stesso Signor Lambert maneggiando l' espressione parabolica fa vedere primieramente l'analogia della legge della mortalità nel primo membro della equazione col votamento di un vaso cilindrico pieno di acqua, secondariamente l' analogia espressa dall' altro membro colla legge del riscaldamento, e raffreddamento de' corpi. Questi due soggetti dell' in tutto estranei alla materia fan conoscere, che la specie umana va gradatamente mancando, come accade al successivo votamento di un vaso cilindrico pieno di acqua nell' Idraulica; e segue nello stesso tempo la gradazione propria de' corpi nel riscaldarsi, e raffreddarsi.

(a) Per determinarsi la probabilità, che ha un uomo di giugnere alla più lunga meta della vita a confronto di un dato numero di persone tutte capaci di poter con ugual facilità morire, fissano i Matematici una curva, nella quale le ascisse x segnano il tempo, in cui muojono le dette persone, e le ordinate y dimostrano la somma de' casi, ne' quali possono in quel tempo morire. In questo stato $\int yxdx$ esprime la somma de'

384. La probabilità composta, o *probabilità di probabilità* è decrescente (§. 382), e perciò diminuisce la speranza, e l' aspettativa. Alle volte però possono combinarsi le probabilità semplici in modo, che faccian crescere la probabilità composta. Di fatto se con uno, che butta un dado, scommetto un ducato, se mi scovre 2, la mia probabilità a vincere, essendo 6 le facce del dado, sarà (§.373.) $p=\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$ della certezza. Ma se aggiungessi: vi do lo stesso ducato, se mi scovrite anche il 3; in questo caso essendo 2 i casi favorevoli, e 4 i contrarj, sarà $p=\frac{2}{2+4}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ della certezza. Ed ecco come cresce per me la probabilità di vincere.

Cagioni, ed Effetti.

385. La probabilità delle cagioni, e quella degli effetti possono combinarsi talmente, che l' esistenza della cagione sia certa, e probabile l' effetto, o certo l' effetto, e probabile la cagione, o finalmente probabili la cagione e l' effetto. L' istesso accade pei segni, e per la cosa segnata. Quindi il risultato di una cagione, o di un segno, che

prodotti del numero de' mentovati casi nel numero de' momenti della più lunga vita, e $sydx$ segna il numero di tutti i casi possibili: dunque pei principj dell' Arte di conjetturare sarà $\frac{syxdx}{sydx}$ valore della probabilità della vita più lunga. Or se riflettesi alla formola, si osserva esser quella stessa, che i Meccanici danno per l' invenzione del centro di gravità delle superficie. In questa curva dunque la distanza del suo centro di gravità dal vertice è uguale al valore dell' aspettativa della più lunga vita. Ecco un mirabile accordo del centro di gravità coll' aspettativa della vita; ed ecco come la Matematica congiunge strettamente certi sottilissimi impercettibili vincoli della natura, che l' uomo idiota crede dell' in tutto disgiunti.

certo esiste, ha lo stesso grado di probabilità, che si trova nell' effetto della cagione, o nel significato del segno.

386. Se l' esistenza della cagione, o del segno è incerta, ma certo l' effetto, o il significato, la conseguenza avrà lo stesso grado di probabilità, che la cagione, o il segno. Se la cagione, l'effetto, ed il segno col significato sono incerti, la conseguenza avrà una probabilità composta.

Combinazioni.

387. Dico *combinare* più grandezze, qualora queste si uniscono a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro ecc., distinguendole col nome di ambi, terni, quaterni ecc. Una sola quantità dunque non ha combinazioni.

388. Or di più grandezze da combinarsi in ambi ognuna si dee combinare colle rimanenti. Il numero degli ambi dunque per ognuna sarà uguale al numero delle grandezze da combinarsi, meno la grandezza *combinatrice*; ma ognuna fa da combinatrice; dunque sarà uguale al numero delle grandezze, moltiplicato per lo stesso numero, meno uno; ma ogni ambo vien così raddoppiato; dunque divido la combinazione per $2=1\times2$, ed il numero delle combinazioni in ambo è $=\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$.

389. Per avere i terni, basta combinare ciascuna grandezza data cogli ambi di esse grandezze. Dunque il numero de' terni sarebbe uguale al numero degli ambi moltiplicato per lo numero delle grandezze -2, per essere due le grandezze combinatrici; ma così ogni terno vien triplicato; dunque divido la combinazione per 3; e la formola de' terni sarà $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

390. Combino i terni con ciascuna grandezza data, ed ho la formola $\frac{n(n-1)(n-2(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$ pei quaterni.

391. Così pei quinterni la formola è ....
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ (*a*).

392. Unisco le formole, ed ho .... $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ + ecc. Or quì rifletto, che se ad esse si aggiungesse $1+n$, formerebbero gli esponenti di un binomio di potenza n (§.79), e la somma di tutte sarebbe$=2^n$(N.§.76 III). Tolgo la grandezza aggiunta $1+n$, ed ho 2^n-1-n espressione generale pel numero totale delle combinazioni ad ambi, terni, quaterni ecc.

393. Vengo al fatto. Cerco la somma degli ambi, de' terni ecc. di cinque grandezze da combinarsi, ed avrò (§.392) $2^n-1-n=2^5-1-5=32-6=26$. E di fatto cinque grandezze danno dieci ambi (§.388), dieci terni (§.389), cinque quaterni (§.390), ed un quinterno (§.391), che assorbiscono il numero 26 (*b*).

(a) Quindi è nata la regola Aritmetica per le combinazioni, di far cioè progredire il numero da combinarsi per tanti termini decrescenti dall' unità, per quanto è l' esponente della combinazione, e di dividere questa progressione per la serie crescente dei numeri naturali dall' unità sino al numero corrispondente all' esponente della combinazione data.

(*b*) È vago, e molto ammirabile l' uso, che delle combinazioni fa *Giuseppe Haidn* in una opericciuola musica intitolata: *Giuoco Filarmonico, ossia maniera facile per comporre un infinito numero di minuetti, e trio anche senza sapere il contrappunto, da eseguirsi col Cembalo, o Piano-Forte*.
Per suonare i *minuetti*, egli giuoca con due dadi, e riporta i numeri, che essi segnano, a due tavole con 12 divisioni nell' altezza corrispondenti ai 12 numeri, che contengono gli stessi due dadi, e con 8 divisioni in larghezza, che corrispondono alle 8 battute. Per suonare il *trio*, giuoca con un dado, e le tavole hanno 6 divisioni nell' altezza, ed 8 nella larghezza. In ciascuna divisione vi è il numero corrispondente alle 176 battute pel minuetto, ed alle 96 battute pel trio. Così sulle stesse carte combina una infinità di minuetti, e trio.

Lotteria.

394. Le combinazioni si applicano agevolmente alle *Lotterie*, perchè in questo è determinato il numero de' casi favorevoli e contrarj. Nel giuoco detto il *Lotto*, nel quale di 90 cartelle, che sono nell' urna, se n' estraggono sole cinque, se giuoco un solo numero per estratto, i requisiti, perchè possa uscire il numero, sono 5 per la natura del giuoco; dunque la probabilità, perchè esca, è (§.373) $p = \frac{5}{90}$, e la probabilità, perchè non esca, che chiamo p', è $p' = \frac{85}{90}$; dunque $p : p' = \frac{5}{90} : \frac{85}{90} = 5 : 85 = 1 : 17$.

395. Ma se giuoco un numero colla determinazione locale, e sia per *primo estratto*, la probabilità, perchè esca, è (§.373) $p = \frac{1}{90}$, e perchè poi non esca, i requisiti sono 89. Dunque la probabilità in contrario $= \frac{89}{90}$. Perciò

I. Per lo *primo estratto* sarà $p : p' = \frac{1}{90} : \frac{89}{90} = 1 : 89$.
II. Per lo *secondo* $p : p' = 1 : 88$.
III. Per lo *terzo* $p : p' = 1 : 87$.
IV. Per lo *quarto* $p : p' = 1 : 86$.
V. Per lo *quinto* finalmente $p : p' = 1 : 85$.

396. La formola per la combinazione degli ambi è (§.388) $n\left(\frac{n-1}{2}\right)$; dunque combino i 90 numeri ad ambi, ed ho $n\left(\frac{n-1}{2}\right) = 90\left(\frac{89}{2}\right) = 4005$. Combino anche i cinque da estrarsi, ed ho $n\left(\frac{n-1}{2}\right) = 5\left(\frac{5-1}{2}\right) = 10$. Dunque (§.373) $p = \frac{10}{4005}$, e per la probabilità in contrario $p' = \frac{3995}{4005}$; dunque $p : p' = 10 : 3995 = 1 : 399\frac{1}{2}$.

397. La combinazione a terni di 90 numeri è (§.389) $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3}) = 117480$. La combinazione de' cinque estratti a terno è $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3}) = 10$; dunque $p = \frac{10}{117480}$, e $p' = \frac{117470}{117480}$; dunque $p : p' = 10 : 117470$.

398. Nella stessa guisa senza prolungarmi si avranno i rapporti delle probabilità favorevoli alle contrarie riguardo ai quaterni, e quinterni. Che se poi si cerca la promessa corrispondente a ciò, che pone il giuocatore, basta istituire una regola di proporzione (§.324), come segue $p : p' = a : x$, nella quale a segni il danaro, che mette il giuocatore, ed x segnerà la promessa, che si cerca.

Testimonj.

399. I testimonj formano anche la probabilità della cosa. La validità di questi dipende dal loro numero, e dalla confidenza, che si ha in ciascuno di essi. L'esame della natura della cosa forma la probabilità intrinseca, e l'esame de' testimonj l'estrinseca. Per la probabilità intrinseca si richiede la possibilità, e dove vi è contraddizione, il probabile cessa. Quindi . . . .

I. La contraddizione nella probabilità intrinseca forma *un fisico impossibile*; e perciò in tale stato si annulla la fisica possibilità. Così è impossibile fisico, che il fuoco approssimato all'asciutta paglia non la bruci.

II. Perchè le azioni seguono la ragione de' principj, che ordinariamente le producono (a), perciò nella *impossibilità morale* bisogna calcolare il rapporto, che passa tra i caratteri, e gli effetti, che da essa derivano. Di fatto è impossibile, che un uomo savio, grave,

(a) Le azioni umane non si valutano dall' evento. Giac. Bernoulli nell' Arte di Conjetturare.

modesto, religioso commetta un' indecenza in pubblico senza ragione o motivo, che lo forzi.

400. Si esaminino ora due testimonj A, e B; ed A mi dia $\frac{9}{10}$ di probabilità. Venga B ugualmente credibile, e me ne darà in conseguenza $\frac{9}{10}$; dunque avremo la certezza totale (§. 370) $A + B = \frac{9}{10} + \frac{9}{10} = \frac{18}{10} = 1 + \frac{4}{5}$, uguale cioè (§.370) alla certezza, più $\frac{4}{5}$ della certezza istessa. Il che è un assurdo. Dunque.

TEOR. CXIV. *La probabilità di una testimonianza non è proporzionale al numero de' testimonj.*

401. Or dovendo io giungere alla certezza per via di testimonj, ciascuno de' quali forma una probabilità, ne segue, che siccome la somma delle probabilità mi conduce alla certezza (§.370); così tutti i testimonj condur mi debbono al termine della certezza istessa. Quindi se il testimonio A mi dà $\frac{9}{10}$ di certezza, gli altri testimonj mi debbono convalidare il residuo $\frac{1}{10}$, per giungere alla certezza totale $\frac{10}{10} = 1$ (§.376); dunque l' altro testimonio B egualmente credibile, che A, mi darà anche $\frac{9}{10}$, ma non della certezza di A, ch' è già fissata (*a*), ma di $\frac{1}{10}$ da fissarsi; e perciò B mi darà $\frac{9}{10} \big| \frac{1}{10}$

(a) Per chiarificare ciò, si rifletta, che le $\frac{9}{10}$ di B non servono per maggiormente convalidare le $\frac{9}{10}$ di A; poichè o le $\frac{9}{10}$ di A danno certezza, o non la danno. Se la danno, la certezza è una, e non ha bisogno di aggiunzione; se le $\frac{9}{10}$ di A hanno bisogno di convalidazione, non sono certe; dunque non saranno $\frac{9}{10}$, ma un altro rotto minore, ch' è contro l' ipotesi.

(§.59) $=\frac{9}{100}$ di certezza, che unita a quella del primo dà la certezza del primo, e secondo testimonio $=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}=$ (§.53) $\frac{99}{100}$ mancante dall' assoluta (§.370) per $\frac{1}{100}$. Un terzo testimonio C ugualmente credibile, che il primo, darà anche $\frac{9}{10}$ di $\frac{1}{100}$, ossia $C=\frac{9}{10}\Big|\frac{1}{100}=\frac{9}{1000}$, e così in seguito. Dunque $A+B+C=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}=\frac{900}{1000}+\ldots\frac{90}{1000}+\frac{9}{1000}=\frac{999}{1000}$ probabilità di tre testimonj ugualmente credibili.

402. Chiamo la certezza $=c$, il numero de' testimonj $=t$, e 'l rapporto della probabilità del primo $a:c=\frac{a}{c}$, e sarà la probabilità di ciascuno $p=\frac{a}{c^t}$. Or essendo $t=1$ per A, $t=2$ per B, $t=3$ per C ecc., avremo la probabilità pei testimonj ugualmente credibili espressa dalla serie $\frac{a}{c}+\frac{a}{c^2}+\frac{a}{c^3}+\frac{a}{c^4}+\ldots\ldots$ ecc. Dunque . . . . .

TEOR. CXV. *Il numero de' testimonj ci fa sempre accostare alla certezza, senza che mai vi giungiamo* (a).

403. Nella stessa maniera del paragrafo antecedente si calcola la credibilità de' testimonj, qualora non sia la stessa. Così se di una certezza A mi dà un testimonio $\frac{5}{6}$ di probabilità, e B me ne dà $\frac{2}{3}$, e C me ne dà $\frac{1}{2}$, sarà $B=\frac{2}{3}\Big|\frac{1}{6}=$ (§.59) $\frac{2}{18}$, che unita alla prima probabilità mi dà $\frac{5}{6}$

(a) Di fatto supponete voi quanto grande si voglia il numero de' testimonj, devono sempre restare i gradi di probabilità del contrario, i quali benchè picciolissimi, pure non ci fanno giungere all' eguaglianza della unità, ch' è il caso della certezza. La Geometria può valutare l' asserzione de' testimonj colle funzioni della curva Logaritmica.

$+\frac{2}{18}=$(§.53) $\frac{17}{18}$ eguale alla probabilità di $A+B$; dunque resta $\frac{1}{18}$ per giugnere all'intera certezza, perciò $C=\frac{1}{2}\Big|\frac{1}{18}=\frac{1}{36}$; dunque $A+B+C=\frac{17}{18}+\frac{1}{36}=$(§.53) $\frac{35}{36}$.

404. Se nella probabilità de' testimonj vogliamo separatamente avvertire la *capacità*, per cui non s'inganna, e la *integrità*, per cui non voglia ingannare; allora la probabilità di ciascun testimonio si calcolerà come composta (*a*).

Di fatto uno mi dà una notizia, ed io conoscendo la sua scarsa intelligenza su tal notizia, la valuto colla probabilità $=\frac{8}{9}$. Quindi scommetto 15 contro 1, che egli sia di buona fede; dunque la probabilità della sua integrità sarà (§.373) $p=\frac{15}{16}$, e perciò la probabilità della sua intelligenza e capacità $=\frac{8}{9}\Big|\frac{15}{16}=\frac{5}{6}$.

405. Il testimonio di udito è meno credibile di quello di veduta, posto tutto il resto uguale. La confidenza del primo va indebolendosi a proporzione del numero delle bocche intermedie dalla prima.

Così A dice di essermi stata conceduta un' annua entrata di 1000 ducati. Suppongo, che il suo avviso abbia $\frac{9}{10}$ di certezza; dunque la mia speranza (§.375) $=1000\times\frac{9}{10}=\frac{9000}{10}=900$. Mi dice A di averlo sentito da B. Or se B

(*a*) L' esperienza è la sicura scorta per giudicare della capacità, ed integrità di un testimonio; calcolando cioè il numero delle menzogne, e quello delle verità, che abbia potuto dire un dato uomo, calcolo in verità molto difficile, anzi impossibile. In mancanza dunque di questo bisogna ricorrere alle voci pubbliche e particolari

l'avesse a me detto, avrei stimata la sua notizia anche di $\frac{9}{10}$; ma perchè l'ha detto ad *A*, nè so, se siasi ingannato, o abbia voluto ingannarmi, perciò la probabilità di *A* sarà composta dalla propria, e da quella di *B*; dunque $= \frac{9}{10} \Big| \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$, e la mia speranza sarà (§.375) $= 1000 \times \frac{81}{100} = 810$ ducati. Se vi fosse un terzo testimonio egualmente credibile, sarebbe la speranza $\left(\frac{9}{10} \Big| \frac{9}{10} \Big| \frac{9}{10}\right) 1000 = 729$ ducati, e così innanzi.

406. Indichi $a : c = \frac{a}{c}$ la probabilità di ciascun testimonio di udito, ed il numero di essi sia $= t$. La probabilità di ciascun testimonio di udito sarà indicata da una serie, il cui termine generale è tutta la probabilità, che posso avere; e perciò a differenza di quella del §. 401 mi vado sempre allontanando dalla certezza (*a*).

407. *La certezza morale* si suol prendere per assoluta, perchè in tal caso l'intera certezza o si ha di raro, o non si ha. La *congettura* non dee cadere sulle cose certe, ma sopra di quelle, delle quali abbiamo alcune probabilità per la certezza. Bisogna perciò valutare tutte le circostanze, che ci possono far venire in cognizione della cosa. Nè basta esaminar ciò, che conduce alla prova della cosa, ma devesi esaminar anche

(*a*) Posta la confidenza di $\frac{95}{100}$ per ogni testimonio, fatto il calcolo, il tredicesimo testimonio darebbe $\frac{1}{2}$ della certezza, ed allora cesserebbe la cosa di esser probabile, ossia cesserebbe la ragione estrinseca, perchè si creda, o no.
Se calcolo la probabilità per $\frac{99}{100}$, dopo 70 testimonj si avrà $\frac{1}{2}$ della certezza. E se la confidenza fosse $\frac{999}{1000}$, allora 70 testimonj renderebbero il fatto incerto.

quello, che può addursi in contrario, affinchè messe ad esame le une, e le altre ragioni, si vegga quali di esse preponderino. Quando si giudica in generale, bastano le prove universali; ma se si giudica dell'individuo, vi bisognano le prove speciali.

408. Generalmente i motivi, che conducono alla probabilità, bisogna che sieno considerati in tre aspetti,

I. Motivi, che esistono necessariamente, ed indicano contingentemente.

II. Motivi, che esistono contingentemente, ed indicano necessariamente.

III. Motivi che esistono contingentemente, ed indicano contingentemente (a).

(a) Giacomo Bernoulli Cap. III. Part. IV. Arte di Conjet. così esemplifica questi tre canoni. Un amico da qualche tempo non mi scrive. Tre possono essere i motivi, la *poltroneria*, la *morte*, i *negozj*. La poltroneria esiste *necessariamente*, perchè tal è la natura dell'amico; ma indica *contingentemente*, perchè può darsi non essere stato questo il motivo. La morte è un motivo *contingente*, perchè può essere ancora tra vivi; ma indica *necessariamente*, perchè il morto non può scrivere. I negozj può averli, e non averli, ed avendoli possono dargli un momento di tempo a scrivere; dunque esistono, ed indicano *contingentemente*.

SEZIONE V.

LA GRANDEZZA DISCRETA NE' SUOI INFINITESIMI AUMENTI, E DECREMENTI.

LEZIONE XXIII.

Idee preliminari alle Grandezze infinitamente piccole.

409. È di essenza della grandezza l'essere suscettibile del *più*, e del *meno* in proporzione, che si cerca o ingrandirla, o impicciolirla. Dopo che essa ha subito uno o più aumenti, o una o più diminuzioni, è anche grandezza; dunque capace di ulteriore aumento, o di ulteriore diminuzione, fino a che può giungere l'umana percezione a supporla maggiore di ogni data nel primo caso, e minore nel secondo. Questo ultimo stato, che alla grandezza si fissa dalla nostra intelligenza, i limiti del quale par che non possa essa sorpassare, dopo che si è renduta maggiore di ogni data, allorchè cresce, o minore, allorchè diminuisce; dicesi generalmente *Infinito*, che nel primo caso io chiamo *infinitamente grande o infinito*, e nel secondo *infinitamente piccolo o infinitesimo*. Questa è l'idea più semplice dell'infinito (*a*) matematico, la quale ci fa vedere, come la grandezza va all'infinito, ed è matematicamente all'infinito divisibile.

(a) Nella definizione dell'infinito è necessaria la clausola *maggiore di ogni data;* poichè se si definisse per *una grandezza crescente senza fine*, come taluni l'han definito, sarebbe infinito il poligono iscritto in un cerchio dato di grandezza, e che tende a confondersi nel cerchio istesso.

410. Or la grandezza, che dallo stato finito passa a quello dell' infinito . . . . .

I. Riceve nel suo successivo cammino tutti i possibili finiti aumenti; dunque incapace di essere aumentata da qualunque grandezza finita, e segnando così ∞ l'infinito, e così $\frac{1}{\infty}$ l' infinitamente piccolo (*a*), avrò $\infty \pm a = \infty$; $\infty \pm 4 = \infty$.

II. Dunque la grandezza, che non è ∞, nè $\frac{1}{\infty}$, è *finita*, variabile, o costante (*b*).

III. La grandezza, che dallo stato finito passando all' infinitamente piccolo, giugne all' ultimo termine di diminuzione, che l' umano intendimento le sa dare (§. 409); non può essere diminuita per alcuna quantità finita.

IV. L' umana intelligenza però può dilatare i fissati limiti dell' infinitamente grande, e dell' infinitamente piccolo; dunque l' infinitamente grande, e l' infinitamente piccolo sono capaci di accrescimento, e di diminuzione; ma tanto il primo, che il secondo non comportano grandezza finita (§. 410. I. III), perchè le sono divenuti eteroge-

(a) È una convenzione segnare così ∞ l' infinito; è poi una forza di raziocinio segnare l' infinitesimo per $\frac{1}{\infty}$, una grandezza finita cioè divisa per l' infinito; dunque se in ordine all' infinito, ed a due variabili v, v' trovo una quarta proporzionale, avrò $\infty : v = v' : \frac{vv'}{\infty}$, ch' è la vera idea dell' infinitamente piccolo.

(b) Chiamo grandezze *variabili* quelle, che sono capaci di aumento, e di decremento. Dico grandezze *costanti* quelle, che non crescono, nè diminuiscono. Le grandezze variabili si concepiscono come fluenti, e generate per così dire da un moto continuo: di tal natura sono le *ascisse*, le *ordinate*, i *rispettivi archi* di una curva ecc. Le grandezze costanti poi si concepiscono determinate, ed invariabili: di tal indole sono i *parametri*, gli *assi*, i *diametri* ecc.

nei; dunque si accresceranno delle grandezze omogenee. Così $\infty + \infty = 2\infty$; $\infty \times \infty = \infty^2$; $\infty \times 3\infty^{\infty} = 3\infty^{2\infty}$; $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$; $\frac{1}{\infty^{\infty}} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty^{\infty}}$; .... $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$.

Ecco l'origine di più infiniti, e degl'infiniti d'infiniti matematici, ossieno de' varj ordini degl'infinitamente grandi, e degl'infinitamente piccoli, che con più proprio vocabolo chiamo *indefinitamente grandi*, *ed indefinitamente piccoli*. Sembrano paradossi quest'infiniti d'infiniti a chi non è avvezzo alle matematiche meditazioni, e molto più a chi ne ignora il vero linguaggio (*a*), ma in realtà non è così.

411. Il crescere, o decrescere, che fa una grandezza, non debbe intendersi per una immediata apposizione, o diminuzione di parti, ma generata dagli elementi, o flussi uguali prodotti in tempi infinitesimi a passi infinitamente piccoli. E siccome non vi è parte di tempo minimo in se, della quale non vi sia altra minore; così non vi è flusso, che in se stesso sia il minimo possibile. Ed ecco nella libertà del Calcolatore impiccolire le grandezze sino a quel segno, che gli comoda, prendendole astrattamente sempre minori di qualunque assegnabile. Dunque questi elementi, o flussi di tal sorta non esistono per se stessi, ed assolutamente in natura, ma sono grandezze relative alla nostra maniera di considerare le cose esistenti nella natura istessa.

(a) Svaniscono i paradossi subitocchè si avverte, che l'infinito matematico non è assoluto, ma di relazione, e che gl'infiniti de' varj ordini altro non sono, che grandezze maggiori di ogni data distinte in varie classi, perchè sono i quadrati, i cubi ecc. del primo infinito, che fa di base a questi ordini. Leggasi Newton per l'idea netta dell'infinito nella fine dello Scolio al Lem. XI. Sez. I. Lib. I. Princ. Mat.

412. Gli elementi o si considerano, come costitutivi, e parti della grandezza generata, o come incrementi, o decrementi, che si danno alla grandezza, che fluisce per generarsi, o per risolversi. I primi sono oggetti del Fisico, cadono i secondi sotto le meditazioni dell'Analista, il quale li chiama *differenziali* della grandezza. Dunque *La differenziale di una grandezza non di esponente variabile* (a) *altro non è, che l' eccesso tra la grandezza finita, e la stessa grandezza aumentata, o scemata di un nuovo flusso.*

413. Tutte le grandezze sono suscettibili di differenzazione, perchè tutte capaci di aumento, e diminuzione, fuorchè quelle, che noi vogliamo considerare giunte a certi limiti, oltre i quali non possono più estendersi, e questi limiti vengono determinati dalla natura, e dalle condizioni del problema. Chiamo queste grandezze *costanti*, non perchè intrinsecamente sieno tali, ma solo perchè in quella data posizione non possono variare, perchè *dati di grandezza.*

414. Le lettere, che finora hanno segnate le grandezze incognite, segneranno quì le *variabili*; quelle, che han segnate le note, indicheranno le *costanti*, ed il segno della differenzazione sarà d, lettera iniziale della parola differenzazione. Così dx si legge: *differenza* di x; dy si legge: *differenza* di y ecc.

415. Faccio $1 : dx = dx : \frac{dx^2}{1} = dx^2$, ed ho dx infinitamente piccola di primo ordine rispetto all' unità, e dx^2 infinitamente piccola di primo ordine rispetto a dx (§. 186.), ma infinitamente piccola di secondo ordine rispetto all' unità; e così proseguendo le terze continue

(a) Questa è la vera idea, che fissar dobbiamo alla differenziale delle grandezze; e questo è il principio generale per la differenzazione delle grandezze variabili.

14

proporzionali, nella progressione geometrica il termine m rispetto al primo termine sarà di ordine $m-1$, rispetto al secondo sarà di ordine $m-2$ ecc., che sono i diversi ordini delle grandezze infinitamente piccole.

416. Nell' analogia $1 : dx = dy : \frac{dxdy}{1} = dxdy$, la prima ragione è un rapporto della grandezza finita 1 all' infinitesima dx; dunque anche tale dev' essere il rapporto di $dy : dxdy$ (§.186); e perciò dy figura una grandezza finita rapportata a $dxdy$ di ordine superiore, e questa infinitamente piccola rispetto a dy; onde $dy \pm dxdy = dy$ (§.410). Dunque ....
Qualunque differenziale di ordine superiore nulla accresce, nulla diminuisce alla grandezza di ordine inferiore.

417. Nell' uso però degl' infinitamente piccoli devesi far conto di tutte le infinitesime grandezze ...
I. Qualora l' infinitesima è connessa e ligata con qualche grandezza finita in forza di condizione nel problema.
II. Qualora la grandezza, di cui essa è infinitesima, o svanisce, o vien anche depressa sino allo stato d' infinitesima rispetto a ciò, ch' era prima: giacchè in tutti due i casi la grandezza, che si trascura, perchè di ordine immediatamente inferiore, sarà tale non in realtà, ma in apparenza.

LEZIONE XXIV.

Evoluzione della Grandezza finita nella sua differenziale.

418. Fin quì si son considerate le grandezze sotto l' aspetto di *cognite*, ed *incognite*. Ora le valuteremo sotto l' aspetto di *costanti*, e *variabili*. La grandezza variabile o si decompone sino alla sua differenziale, o si compone dalla sua differenziale data. Chiamo il pri-

mo metodo *Calcolo differenziale*, ed il secondo *Calcolo integrale*. Ambidue uniti formano il calcolo *Infinitesimale*. Dunque tutta la dottrina di questo calcolo si fonda sopra di un problema diretto, ed inverso così enunciato: *data la funzione della variabile, si cerca la sua differenziale: data la differenziale, si cerca la corrispondente funzione della variabile.* Il problema diretto dà il metodo di *differenziare*, e l' inverso insegna la maniera d' *integrare*.

Problema diretto.

419. Il segno della differenzazione è d (§.414), e la differenziale di una grandezza (§.412) non di esponente variabile pareggia l' eccesso della variabile sopra di se stessa aumentata della sua differenziale. Dunque per differenziare una data funzione non di esponente variabile stabilisco un Canone generale, cioè:

Si ha la differenziale di qualunque algebrica funzione non di esponente variabile, se in vece di ciascuna variabile si sostituisce la variabile aumentata della sua differenziale, e da questa nuova funzione introdotta si sottrae la data.

420. Vengo all' applicazione di questo Canone alle varie particolari modificazioni, che aver possa una grandezza, per fissare seperatamente i teoremi delle particolari di lei funzioni. Cerco primieramente la differenziale di $a+mx$, ed ho $d(a+mx)=a+mx+mdx-a-mx=mdx$. Dunque....

TEOR. CXVI. *Le semplici variabili, che non oltrepassano il primo grado, si differenziano colla sola apposizione del segno differenziale alla variabile.*

421. Or per avere la differenza di xy, do l' insensibile aumento ad x, ed ho $x+dx$, e per y ho $y+dy$; dunque la sua differenziale (§.419) è $(x+dx)(y+dx)-xy=$

$xy+ydx+xdy+dxdy-xy=ydx+xdy+dxdy$; ma $dxdy$ è infinitesima di ordine superiore ad ydx, o ad xdy (§.416); dunque $ydx+xdy+dxdy=ydx+xdy=d(xy)$. Dunque...

TEOR. CXVII. *Se le semplici variabili son moltiplicate, si ha la differenziale di esse dalla somma della differenziale di ciascuna nel prodotto delle altre.* Così $dxyz=xydz+xzdy+yzdx$ (a) ecc.

422. Potendosi le potenze considerare, come prodotti, le differenzio col metodo de' medesimi. Si cerchi dunque $d(x^2)=dxx=$ (§.421) $xdx+xdx=2xdx=2x^{2-1}dx$. Così $dx^m=mx^{m-1}dx$. Dunque....

TEOR. CXVIII. *La differenziale di una potenza si ha, se la variabile diminuita dell'unità nell' esponente si moltiplica pel suo esponente, e per la sua semplice differenziale.*

423. Cerco differenziare $\frac{x}{y}$. So (§.37), che $\frac{x}{y}=xy^{-1}$ Dunque sono nel caso di differenziare un prodotto, di cui un fattore comparisce potenza di esponente negativo; dunque (§.421.422) $d(\frac{x}{y})=d(xy^{-1})=y^{-1}dx-1xy^{-1-1}dy=$ (§.37) $\frac{dx}{y}-\frac{xdy}{y^2}=$ (§.52) $\frac{y^2dx-yxdy}{y^3}=\frac{ydx-xdy}{y^2}$. Dunque..

TEOR. CXIX. *La differenziale di un rotto si ha, se il denominatore si moltiplica per la differenziale del numeratore, e da questo prodotto si sottrae il numeratore moltiplicato per la differenziale del denominatore, ed il tutto si divide pel quadrato del denominatore.*

424. Quindi $d(\frac{x}{a})=\frac{adx-xdo}{a^2}=\frac{dx}{a}$; così $d(\frac{a}{y})=\ldots\frac{ydo-ady}{y^2}=-\frac{ady}{y^2}$; e finalmente $d(\frac{ax}{y})=\frac{aydx-axdy}{y^2}$.

(a) Con più stretto linguaggio: *si differenziano i prodotti di più fattori con prendere successivamente un fattore variabile, e gli altri come costanti.*

425. Se cerco la differenziale di $\sqrt[m]{x^n}=(§.87)x^{\frac{n}{m}}$, sono al metodo delle potenze; e perciò $d(\sqrt[m]{x^n})=d(x^{\frac{n}{m}})=$ $(§.422)\frac{n}{m}x^{\frac{n-1}{m}}dx=(§.37)\frac{ndx}{mx^{\frac{-n+1}{m}}}=\frac{ndx}{mx^{\frac{-n+m}{m}}}=\ldots\ldots$ $\frac{ndx}{m\sqrt[m]{(x^{m-n})}}$. Dunque....

TEOR. CXX. *La differenziale di una radicale pareggia un rotto, il cui numeratore è il prodotto della differenziale della semplice variabile moltiplicata pel di lei esponente; e'l denominatore è il prodotto dell' esponente della radicale per la stessa radicale, che ha la data grandezza sotto di se, elevata all' esponente della radicale meno il proprio esponente.*

Così $d\sqrt{x}=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$; e $d(\sqrt{ax-x^2})=\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$; e finalmente $d(\sqrt[3]{ax-x^2})=\frac{adx-2xdx}{3\sqrt[3]{(ax-x^2)^2}}$, ecc....

Differenzazione delle grandezze Logaritmiche.

426. Se la grandezza da differenziarsi è logaritmica, come lx, e si cerca la differenziale del logaritmo della variabile x, fo $lx=z$, ed ho $z+dz=l(x+dx)$. Quindi $dz=l(x+dx)-z=l(x+dx)-lx=(§.289)l(\frac{x+dx}{x})$ $=l(1+\frac{dx}{x})=(§.310)A(\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\text{ecc.})=(§.416)\frac{Adx}{x}$. Dunque....

TEOR. CXXI. *La differenziale del logaritmo di una semplice grandezza pareggia la differenziale della grandezza moltiplicata per lo modulo divisa per la stessa grandezza.*

427. Così essendo $lxy = (§.288) lx + ly$, sarà $d(lxy) = dlx + dly = (§.426)\ A(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}) = (\frac{ydx + xdy}{xy})A$. Dunque . . .

TEOR. CXXII. *Resteranno differenziati i logaritmi de' semplici prodotti, se si moltiplica una variabile per la differenziale dell'altra, e viceversa, e la somma de' prodotti divisa per lo prodotto dato si moltiplica per lo modulo.*

428. Or se si vuole la differenza de' logaritmi delle potenze, cioè di lx^n; sarà (§.426) $d(lx^n) = \frac{Adx^n}{x^n} = \ldots$

$(§.422)\ \frac{Anx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{Andx}{x^{n-n+1}} = \frac{Andx}{x}$. Dunque . . .

TEOR. CXXIII. *La differenziale del logaritmo di una potenza si ha, se l'esponente della potenza si passa per coefficiente alla differenziale della semplice radice moltiplicata per lo modulo, e si divide tutto per la stessa radice.*

429. Se cerco la differenziale di $d(lx)^m$ potenza de' logaritmi, sarà $d(lx)^m = (\frac{m(lx)^{m-1}dx}{x}A = m(lx)^{m-1}\frac{Adx}{x}$.

Così si avrà $d(lx^n)^m = mn(lx^n)^{m-1}\frac{Adx}{x}$.

430. Se si vuole la differenziale di $l\frac{x}{y}$; sarà $d(l\frac{x}{y}) = (§.289)\ d(lx - ly)A = (§.427)\ (\frac{ydx - xdy}{xy})A$. Dunque . . .

TEOR. CXXIV. *La differenziale de' logaritmi de' fratti pareggia il prodotto del denominatore nella differenziale del numeratore, meno il prodotto del numeratore nella differenziale del denominatore, divisa la differenza per lo prodotto del numeratore col denominatore.*

431. Se mi proponessi differenziare un logaritmo di logartimo, come $\mathrm{ll}x$; farei $\mathrm{l}x=z$; e differenziando $\mathrm{l}z$, avrò (426) $d(\mathrm{l}z)=\frac{Adz}{z}=\frac{A.\,Adx}{z.\,x}=\frac{A^2dx}{x\mathrm{l}x}$.

I. Così nella $d(\mathrm{lll}x)=d(\mathrm{l}^3x)$, facendo $\mathrm{ll}x=z$, avrò $d(\mathrm{l}^3x)=\frac{A^3dx}{x\mathrm{l}x\,.\,\mathrm{l}^2x}$.

II. Così avrò $d(\mathrm{l}^4x)=\frac{A^4dx}{x\mathrm{l}x\,.\,\mathrm{l}^2x\,.\,\mathrm{l}^3x}$.

III. E generalmente $d(\mathrm{l}^nx)=\frac{A^n\,dx}{x\mathrm{l}x\,.\,\mathrm{l}^2x\,.\,\mathrm{l}^3x\,.\,\mathrm{l}^4x\,.....\,\mathrm{l}^{n-1}x}$.

Dunque . . .

TEOR. CXXV. *La differenziale di un logaritmo pareggia la differenziale della semplice variabile moltiplicata per lo modulo elevato all'esponente logaritmico diviso per un prodotto, i di cui fattori sono successivi logaritmi, che cominciano da quello della semplice variabile, e terminano al logaritmo, che ha per esponente il logaritmo dato meno l'unità* (a).

432. Si è dimostrato, che(§.426)$d\mathrm{l}x=\frac{Adx}{x}$. Ma ne' logaritmi naturali il modulo $A=1$(N.§.309); dunque sarà $d\mathrm{l}x=\frac{dx}{x}$, e $dx=xd\mathrm{l}x$. Dunque. . .

TEOR. CXXVI. *La differenziale di una qualunque grandezza pareggia la stessa grandezza moltiplicata per la differenziale del suo logaritmo* (b).

(a) In tutti questi teoremi stabiliti per la differenzazione delle grandezze logaritmiche si è valutata la grandezza A a solo fine di generalizzare la teoria per qualunque sistema logaritmico di modulo A. Trattandosi però de' logaritmi naturali pei quali $A=1$, tal modulo non si calcola.

(b) Questo secondo principio è molto atto a differenziare le grandezze algebriche. Di fatto . . . .

Differenzazione delle grandezze Esponenziali.

433. Col principio stabilito nell' antecedente paragrafo mi fo strada alla differenzazione delle *funzioni Esponenziali*, cioe di quelle grandezze di esponente variabile. Cerco $d(a^x)$, ed avrò $da^x = (\S.432) a^x d\mathrm{l}a^x = (\S.290) a^x dx\mathrm{l}a = a^x \mathrm{l}a dx$.

434. Sia ora $d(y^z)$, ed avrò $(\S.432) dy^z = y^z d\mathrm{l}y^z = (\S.290)$ $y^z d(z\mathrm{l}y) = (421.426) y^z(dz\mathrm{l}y + z\frac{dy}{y})$.

TEOR. CXXVII. *La differenziale di una grandezza esponenziale pareggia la stessa grandezza esponenziale, moltiplicata per la differenziale del prodotto del suo esponente nel logaritmo della sua radice.*

435. Ma se l' esponente variabile è innalzato ad un altro esponente variabile, cioè ad un esponenziale di secondo ordine, come x^{y^z}, e se ne cerca la differenziale, la discorro così.

Suppongasi $y^z = u$; dunque $x^{y^z} = x^u$; e $(\S.434)$ $du = y^z(dz\mathrm{l}y + \frac{zdy}{y})$, e $dx^{y^z} = dx^u = (\S.432) x^u d\mathrm{l}x^u = x^u d(u\mathrm{l}x) =$

I. La differenziale di xy è $d(xy) = xy(d\mathrm{l}x + d\mathrm{l}y) = (\S.427)$ .. $xy(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}) = ydx + xdy$, come nel $\S.421$.

II. La differenziale di x^m è $d(x^m) = (\S.432)\ x^m d\mathrm{l}x^m = (\S.428)$ $xm\frac{mx^{m-1}dx}{x^m} = mx^{m-1}dx$, come nel $\S.422$.

III. La differenziale di $\frac{x}{y}$ è $d(\frac{x}{y}) = \frac{x}{y}(d\mathrm{l}x - d\mathrm{l}y) = \S.427)$ . . . . . . $\frac{x}{y}(\frac{ydx - xdy}{xy} = \frac{x}{xy^2}(ydx - xdy) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, come nel $\S.423$, e così del resto.

$$(\S.\ 421.428)\, x^u\left(du\,\mathrm{l}x+\frac{udx}{x}\right)=x^{y^z}\left(y^z\left(\frac{dx}{x}+z\,\mathrm{l}\frac{xdy}{y}+dz\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}y\right)\right)$$

$$=x^{y^z}(y^z)\left(d\mathrm{l}x+z\,\mathrm{l}x\frac{dy}{y}+dz\,\mathrm{l}x\,\mathrm{l}y\right).$$

Che se $x=y=m$, cioè se son costanti x,y, sarà $dx^{y^z}=dm^{m^z}$ $=m^{m^z}(m_z)(dz)$.

436. Dalle unioni dell' espressioni monomie si formano le polinomie ; dunque queste saranno differenziate subito che si differenziano quelle. Che perciò . . . . .

$$d\left(x+xy+x^2+\frac{x}{y}+\sqrt[m]{x^n}-\mathrm{l}x-a^x\right)=(420.421.422.423.$$
$$425.426.433)\ dx+xdy+ydx+2xdx+\frac{ydx-xdy}{y^2}\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+\frac{n\,dx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}-\frac{Adx}{x}-a^x\,\mathrm{l}a\,dx\ .\ .\ .\ .$$

Questa è la più netta idea del Calcolo differenziale. E quantunque il principio stabilito nel §. 419 è nato da una forza di raziocinio, pure è quello istesso del metodo de' *Limiti* (a) praticato dagli antichi Geometri, ed ora vantaggiosamente esteso da'moderni Analisti.

(a) Il Grande d'Alembert vide il primo nelle immortali opere del Newton le regole fondamentali de' Calcoli trascendentali dipendenti dall' antica teoria de' *Limiti*, della quale si servirono i primi Geometri, allorchè dalla misura delle figure rettilinee vollero passare alla misura delle curvilinee.
Questa via battè *Archimede* il primo per la misura del cerchio, e per la misura dello spazio parabolico. Ci siamo contentati con lui di un' approssimazione per lo primo spazio, e di un' esatta misura pel secondo. Questo metodo de' limiti è divenuto oggi il fondamento del Calcolo infinitesimale. Il celebre Cousin non solo lo ha applicato alle Matematiche pure, ma lo ha esteso ancora alle miste. Egli riduce tutto il metodo alle seguenti due proposizioni fondamentali.

437. Che se una funzione differenziata si maneggia, come se fosse un' ordinaria funzione, supponendo variabili tutti i termini di essa, o uno, o più, e si maneggian i rimanenti, come costanti (cosa che si determina dalla condizione del problema) si avranno le *differenziali di differenziali*. E siccome il segno della prima differenziale è d (§.414); così quello delle seconde è d^2, quello delle

---

I. *Una grandezza ha per limite un' altra grandezza, quando si sa, che la prima può avvicinarsi alla seconda sino a non differirne, che di una quantità per quanto piccola si vorrà, senza poter mai coincidere con essa.*

II. *Se due grandezze, che crescono, o continuamente decrescono, conservano tra loro la stessa invariabile ragione, questa ragione sarà quella de' limiti delle due grandezze date.*

Se quì mi avessi prefisso altro fine, farei vedere, che questi due soli principj di Cousin non bastano a' Calcoli trascendentali. Affinchè però si abbia una precisa fondamentale idea di questo calcolo, sia c una grandezza costante, e chiamo v una variabile, la quale successivamente diminuisca, quando $v > c$, e cresca successivamente, qualora $v < c$. Nell' uno, e nell' altro caso si avvicinino esse senza fine in modo, che $\pm c \mp v$ si faccia minore di qualunque omogenea; dunque sarà c *limite* di v, e le do per segno L.

Quindi posto $c - v$, dev' essere $v < c$, e posto $v - c$, devemettersi $v > c$.

Fo soffrire ad v l' ultima variazione, e si faccia $v = c$. Chiamo c in questo caso *limite inclusivo* di v; e se non può mai farsi $v = c$, chiamo c *limite esclusivo* di v. Cousin non fa questa necessaria distinzione di limiti. E pure il Newton nel Lem. I. Sez. I. Lib. I. Princ. Mat. parla de' limiti inclusivi, allorchè contempla l' avvicinamento, che v fa a c costantemente in un tempo finito. Nel cor. 4. poi del Lem. III. chiama la curva limite esclusivo del perimetro de' poligoni variabili iscrittibili, e circoscrittibili.

Or se $\pm c \mp v = x$, potrà x farsi minore di qualunque omogenea, e perciò *evanescente*. Se $Lv = c$ inclusivo, sarà x una volta nello stato zero; ma se $Lv = c$ esclusivo, si avvicinerà sempre x allo zero, ma giammai non vi giungerà, o cesserà di esistere; che perciò si troverà nello stato dell' *Infinitesima*. Que-

terze d^3 in modo, che $d^2 x$ indica la seconda differenza di x, espressione differente da dx^2, che indica il quadrato di dx. Quindi . . . .

I. La differenziale di $(dy \pm dx \mp dz)$, supponendo costante la dx, sarà $= d^2 y \pm dx \mp d^2 z$.

II. Essendo dx variabile, sarà $d(xdx) =$ (§. 421) $xd^2x + dx^2$.

III. Così $d(dx^2) =$ (§. 422) $2dxd^2x$.

IV. Così $d\left(\frac{x}{dx}\right) =$ (§. 423) $\frac{dx^2 - xd^2x}{dx^2} = 1 - \frac{xd^2x}{dx^2}$ ecc. ecc.

---

sta definizione della grandezza infinitesima ci libera dal falso metodo del Cavalieri, come si ha dal Newton, dalla Cappelle, dall' Enciclopedia ecc.

Dall' essere $+ c \mp v = x$, sarà identicamente $c \pm x = v$; dunque $L(c \pm x) = Lv$; ma $Lv = c$; dunque $L(c \pm x) = c$. Ecco il Canone per trovare il limite di una variabile $u = c \pm x$. *Sciolgo la variabile in due parti, una costante c, e l'altra evanescente x; sottraggo l'evanescente $\pm x$, e la rimanente costante c è il limite cercato.*

Così sapendo c limite della variabile v, posso esprimere il valore della variabile, aggiungendo alla c una ignota evanescente x, e fare $v = c \pm x$. Questa è in breve l' idea fondamentale del calcolo de' Limiti.

Vengo all' applicazione. Una funzione qualunque di x venga da Y, la quale diventi y, qualora in vece di x si mette $x \pm dx$; dunque $y - Y = x \pm dx - x = \pm dx$; dunque $y - Y$ è la *differenziale finita* di Y, ossia di x. Dunque . . . .

Per determinare la differenziale finita di una qualunque funzione si sostituisca ad x la $x \pm dx$, e se ne sottragga la funzione proposta, ed il residuo darà la differenziale cercata, canone stabilito nel §. 419.

Nel testo, per facilitare le operazioni differenziali, mi son servito di questo principio nel differenziare semplici grandezze, e prodotti, ed a questi ho ridotte poi tutte le altre operazioni, per far vedere il nesso delle verità. Or quì insegno a differenziare col metodo de' limiti, affinchè si sappia la manovra di quest' applicazione.

Sia da differenziarsi xz; avrò $xz = Y$, ed $y = (x + dx)(z + dz)$;

LEZIONE XXV.

La Grandezza incapace di ulteriore aumento o decremento.

438. Una grandezza, che a passi infinitesimi cresce sino ad un certo stato, al quale la convenzione fissa i limiti; o le circostanze, le quali l'accompagnano, non per-

---

dunque $d(xz)=y-Y=xz+zdx+xdz+dxdz-xz=zdx+xdz+dxdz$. Se si volesse togliere $dxdz$, perchè infinitesimo di ordine superiore (§.416), sarebbe $d(xz)=zdx+xdz$, come nel §. 421.

Sia da differenziarsi x^m; sarà $d(x^m)=y-Y=(x+dx)^m-x^m=$ (§.79) $x^m+mx^{m-1}dx+m(\frac{m-1}{2})x^{m-2}dx^2$ .. ecc.$-x^m=mx^{m-1}dx+m(\frac{m-1}{2})x^{m-2}dx^2$ ... ecc.; e togliendo il secondo termine, perchè infinitesimo di ordine superiore, si ha $d(x^m)=mx^{m-1}dx$, come nel §. 422.

Sia da differenziarsi $(\frac{x}{y})$; sarà $d\frac{x}{y}=y-Y=\frac{x+dx}{y+dy}-\frac{x}{y}=$ ... $\frac{xy+ydx-xy-xdy}{y^2+ydy}=\frac{ydx-xdy}{y^2+ydy}=$ (§.416) $\frac{ydx-xdy}{y^2}$ come nel §.423.

Sia da differenziarsi $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{n}{m}}$; sarà $d(x^{\frac{n}{m}})=y-Y=$ .... $(x+dx)^{\frac{n}{m}}-x^{\frac{n}{m}}=x^{\frac{n}{m}}+\frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx+$ ecc. ..... $-x^{\frac{n}{m}}=$ (§.37) $\frac{ndx}{mx^{\frac{-n+m}{m}}}=$ (§.87) $\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$, come nel §.425.

Sia da differenziarsi lx; sarà $d(lx)=y-Y=l(x+dx)-lx=$ (§.289) $l\frac{x+dx}{x}=l(1+\frac{dx}{x})=$ (§.310) $\frac{Adx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}$ .... ecc.$=$ (§. 416.) $\frac{Adx}{x}$, come nel §.426.

mettono, che più cresca; o che sia finalmente giunta allo stato di quella massima crescenza, nel quale ce la immaginiamo superiore a qualunque data, essa grandezza in tal posizione non può ricevere, che una sola variazione, ch' è quella del passaggio successivo dallo stato di *massima* grandezza a quello di *minima*. Al contrario se la stessa grandezza per le addotte circostanze si trova giunta allo stato *minimo*, ad altra variazione non si soggetta, che al successivo accrescimento sino al *massimo*. Questi due limiti, che aver può la grandezza, sono determinabili, e la maniera, di cui si serve l'Analista, dicesi *Metodo de' Massimi*, *e Minimi*.

439. Per fissare questo metodo, rifletto che il crescere, o decrescere della grandezza si fa nel tempo, ed a passi infinitesimi successivi; dunque il passo conseguente pareggia l' antecedente, più l' infinitesimo suo aumento. Or nello stato *massimo*, o *minimo* è incapace la grandezza di ulteriore aumento nel primo, e di ulteriore decremento nel secondo; dunque essendo giunta la grandezza allo stato *massimo*, o *minimo*, le sue differenziali sono $=o$; dunque il criterio per avere la grandezza nello stato *massimo*, o *minimo* è il seguente:

Sia da differenziarsi a^x; sarà $d(a^x)=y-Y=a^{x+dx}-a^x=a^x(a^{dx}-1)$. E buttando l' espressione in serie, e servendomi del solo primo termine, essendo gli altri al solito differenziali di ordine superiore, avrò $da^x=a^x(a^{dx})=$(§.432) $a^x(dx\,la)$, come nel §.433.

Il metodo è lo stesso per le seconde, terze ec. differenze. Questa in breve è la celebre Teoria dei *Limiti*, e la sua applicazione al Calcolo differenziale. Avete quì tre metodi per differenziare: uno nel testo, deducendo verità da verità, l'altro nella nota del §. 432 per mezzo delle grandezze logaritmiche, ed il terzo, ch' è questo de' limiti. Ci sarebbe il quarto, ch' è quello della sostituzione, ma perchè volgarissimo, e si trova in tutte le istituzioni, perciò lo tralascio. Ho fatto ciò a solo oggetto di far comprendere il gran nesso delle verità matematiche, e la prodigiosa estensione de' principj della Scienza.

Si metta il problema in equazione, e si differenzii; si faccia la differenzazione$=o$, si prosegua all'assolamento della incognita, e si avrà il massimo, o minimo limite della data grandezza secondo le condizioni date.

440. Vengo al fatto. *Cerco dividere un numero dato in due parti in modo, che il loro prodotto sia il massimo possibile.*

Chiamo il numero dato a, una di lui parte x, e perciò l'altra $a-x$; dunque $d(a-x)x=d(ax-x^2)=adx-2xdx=(a-2x)\,dx=o$ (a); e perciò sarà $a-2x=o$, ed $a=2x$, ed $x=\frac{a}{2}$. Il numero dunque dato dee dividersi in due parti uguali, affinchè il loro prodotto sia il massimo possibile. Gli si dia il valore numerico, e si troverà tale.

441. Così ancora: *Cerco dividere un numero in tre parti in modo, che il prodotto di tutte tre formino un massimo.*

Chiamo x, y due delle parti, che cerco; dunque la terza sarà $a-x-y$, e perciò $d(a-x-y)xy=d(axy-x^2y-xy^2)=axdy+aydx-x^2dy-2yxdx-y^2dx-2xydy=(a-x-2y)\,xdy+(a-y-2x)ydx=o$; dunque anche le parti$=o$, e perciò $a-x-2y=o$, $a-y-2x=o$. Or sono nel caso di maneggiare due semplici equazioni; dunque $a-2y=x$, ed $\frac{a-y}{2}=x$; e perciò $a-2y=\frac{a-y}{2}$, ossia $2a-4y=a-y$, ed $\frac{a}{3}=y$; e così $x=a-\frac{2a}{3}=\frac{3a-2a}{3}=\frac{a}{3}$; dunque le tre parti debbono essere uguali.

442. La soluzione di questo problema ci fissa un canone pel maneggio di una funzione Y di più variabili x, y, z, affinchè divenga *massima*, o *minima*. In tal caso sarà $dY=Pdx+Qdy+Rdz$ . . . . . ecc. Si fac-

(a) Dovendo essere $dx=o$, sarà $(a-2x)\,dx=o$; dunque anche l'altro fattore $a-2x=o$.

cia $P=o$, $Q=o$, $R=o$, e si avranno tante equazioni, quante sono le incognite. Si maneggino al solito, e si avranno i rispettivi valori delle incognite nel caso del massimo, o minimo limite della grandezza. La grand' estensione di questo metodo si sperimenta specialmente nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria.

LEZIONE XXVI.

Composizione della Grandezza finita dalla sua differenziale.

443. Siccome nella Lezione XXIV. dalla variabile data si è venuto alla sua differenziale; così in questa dalla differenziale data si risale alla variabile, cui appartiene. Questo metodo dicesi *Integrale*, o *Sommatorio*, e'l suo segno è *s*. Nella decomposizione si è camminato per sicuri sentieri, ma nella composizione troviamo una via troppo intralciata. Nè questo è un mistero nelle Matematiche, ma una conseguenza della operazione. Di fatto sappiamo, che qualunque data grandezza, si può elevare a qualunque potenza, ma non da ogni grandezza, che ci si propone a considerare, come potenza, possiamo avere un' esatta radice: possiamo altresì avere un esatto prodotto, ma non sempre un esatto quoto. Quì dunque altro non farò, che dare la maniera d' integrare, assegnare i caratteri delle grandezze capaci d' integrazione, e stabilire il metodo di approssimazione nella integrazione delle grandezze incapaci di esatta composizione. Eccoci dunque al...

Problema inverso.

444. Chiamo *integrale*, o *sommatoria* quella funzione, che differenziata produce la differenziale data. Così perchè differenziando mx, produce (§.420) mdx; chiamo

mx integrale di mdx, e scrivo $mx = Smdx$ (a). Ora mdx è la differenziale tanto di mx, quanto di $mx \pm a$ (§. 421); dunque a ciascun integrale bisogna aggiungere col doppio segno una costante C, e scrivere $Smdx = mx \pm C$ (b).

445. Se la differenziale, che si propone ad integrare, ha i caratteri di quelle funzioni differenziate nella Lezione XXIV, o si può alle medesime ridurre; in tal caso è sempre suscettibile d' integrazione, e nell'operazione basta dare passi opposti a quelli dati per la differenzazione. Quindi il Canone inverso a quello enunciato nel §. 419 è così espresso....

Se ad una differenziale monomia si aumenta dell' unità l'esponente della variabile, e quindi si divide per lo prodotto dell' esponente così accresciuto nella differenziale della variabile, si avrà l' integrale cercato.

446. Questo Canone generale patisce una necessaria eccezione, ed è, quando la variabile, che accompagna la sua differenziale, è elevata all'esponente —1, il che d'ordinario suol accadere nelle divisioni ridotte, o nelle fra-

(a) D' Alembert volendoci generalizzare l' idea del Calcolo Infinitesimale, ci fa vedere, che siccome il Calcolo differenziale consiste in dedurre algebraicamente in un compendioso, e semplice modo il limite del rapporto delle differenziali evanescenti di due variabili dalla conoscenza del rapporto delle dette variabili; così il Calcolo integrale consiste nel rimontare dall' algebrica conoscenza di questo limite compendiosamente all'algebrica conoscenza del rapporto delle dette variabili. Il Newton deduce questo sistema dal metodo dell' esaustioni.

(b) Affinchè si dia a C il vero carattere, di positivo cioè, o di negativo, si faccia nella formola integrata $x = 0$. Se nulla rimane, è segno, che si è avuta l' intera somma cercata; dunque l' integrale è completo, nè vi è bisogno di C; dunque $C = 0$. Ma se fatto $x = 0$, rimane una grandezza positiva, questa indica, che nella sommatoria cercata vi è di più del dovere; dunque bisogna toglierlo, e l' integrale sarà completo con dargli $-C$. Così se fatto $x = 0$, resta una grandezza negativa, si darà $+C$ all' integrale, per renderlo completo.

zioni da ridursi. Di fatto $S\frac{ydy}{y^2}$ =(§.37) $Syy^{-2}dy$=(§.28) $Sy^{-1}dy$=(§.445) $\frac{y^{-1+1}dy}{(-1+1)dy}\pm C=\frac{1}{0}\pm C=\infty$.
Per evitare questo assurdo, rifletto che $y^{-1}dy$=(§.37) $\frac{dy}{y}$; dunque (§.426)=dly; e perciò devesi in simili casi ricorrere a' logaritmi.

447. Vengo all'applicazione del Canone.
I. Dal §.420 ho mdx; dunque $Smdx$=(§.36) Smx^0dx= (§.445) $\frac{mx^{0+1}dx}{(0+1)dx}=mx\pm C$.
II. Così dal §.421 ho $ydx+xdy$. Quì suppongo $x=y$, ed ho $S(ydx+xdy)=S(xdx+xdx)=S2xdx$=(§.446) x^2 $=xx$; e sostituendo y ad un x, avrò $S(ydx+xdy)=xy\pm C$.
III. Dal §.422 ho $2xdx$; dunque $S2xdx=\frac{2x^2}{2}=x^2\pm C$.
IV. Così dal §.423 ho $\frac{ydx-xdy}{y^2}$; dunque $S\frac{ydx-xdy}{y^2}$ = (§.37)=$S(yy^{-2}dx-xy^{-2}dy)$=(§.28)$S(y^{-1}dx-xy^{-2}dy)$.
Eccoci al caso del §.446; dunque dico così: $S\frac{ydx-xdy}{y^2}$=...
(§.42)$S(\frac{ydx-xdy}{y^2})\frac{x}{x}=S(\frac{ydx-xdy}{xy})\frac{x}{y}=(\frac{Sydx}{xy}-\frac{Sxdx}{xy})\frac{x}{y}$=..
$(\frac{Sdx}{x}-\frac{Sdy}{y})\frac{x}{y}$=(§.426)$S(dlx-dly)\frac{x}{y}$=(N.432.III.)$\frac{x}{y}\pm C$.
V. Così dal §.425 ho $\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$; dunque $S\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$=....
(§.87) $S\frac{ndx}{mx^{\frac{m-n}{m}}}$=(§.37)$S(\frac{n}{m}x^{\frac{-m+n}{m}}dx)=S(\frac{n}{m}x^{\frac{n-m}{m}}dx)$=
(§.445)$\frac{\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}}}{\frac{n}{m}}=x^{\frac{n}{m}}$=(§.88) $\sqrt[m]{x^n}\pm C$.

Integrazione delle funzioni Logaritmiche.

448. Avendosi la differenziale di una grandezza logaritmica con dividere (§.426) la differenziale della variabile, cui appartiene il logaritmo, per la stessa variabile; sarà perciò il logaritmo del divisore l'integrale cercato. Dunque $S\frac{dx}{x} = lx$ (§.426).

Così $S\frac{-dx}{x} = -lx = l\frac{1}{x}$ (§.286).

Così $S\frac{-dx}{1+x} = l\frac{1}{1+x}$.

E generalmente qualora il numeratore è differenziale del denominatore, o multiplo, o submultiplo della stessa differenziale, l'integrale sarà sempre il logaritmo del denominatore, o il multiplo, o submultiplo del suo logaritmo. Quindi $S\pm\frac{2xdx}{a^2\pm x^2} = l(a^2 \pm x^2)$.

449. Mi propongo ad integrare $\frac{dx}{xlx}$. Sia $lx = y$, e sarà (§.426) $dy = \frac{dx}{x}$; dunque $\frac{dx}{xlx} = \frac{dy}{y}$; ma (§.426) $\frac{dy}{y} = ly$; dunque $S\frac{dx}{xlx} = S\frac{dy}{y} = ly = llx \pm C$, come nel §.431, supponendo il modulo $= 1$. Dunque l'integrazione de' logaritmi di logaritmi consiste in una sostituzione.

Integrazione delle funzioni Esponenziali.

450. Se ora inverto il metodo tenuto nel §.433, avrò l'integrale di $a^x ladx$; cioè $S\,a^x ladx = \frac{a^x ladx}{ladx} = a^x$ (§.433).

451. Se cerco $S\,x^y(y^z)(x^{-1}dx + \frac{zdylx}{y} + dzlxly)$, sup-

pongo $x^{y^z} = u$, ed ho (§.290) $lu = y^z lx$; e differenziando, sarà $\frac{du}{u} = y^z (x^{-1} dx + \frac{z dy lx}{y} + dz lx ly) = A$; dunque $du = Au$, e $S du = S Au$; ossia $u = S Au$, ossia $x^{y^z} = S x^{y^z} A$, come nel §.437: metodo che tutto consiste nelle sostituzioni.

LEZIONE XXVII.

Grandezze Infinitesimali non della forma ordinaria, ma suscettibili di esatta composizione.

452. Generalmente una formola differenziata è suscettibile di esatta integrazione, qualora è delle forme delle differenziazioni della Lezione XXIV., come si è veduto nella Lezione antecedente. Ma se tale non comparisce, ed a quelle forme può ridursi, sarà anche suscettibile di esatta integrazione. Queste formole noi quì esaminiamo.

453. Se comparisce la formola $adx\,(b+x)^m$, suppongo $z=b+x$, dunque $dz=dx$, perciò $z^m=(b+x)^m$, ed $adx(b+x)^m = az^m dx = az^m dz$ grandezza integrabile. Dunque . . .

TEOR. CXXVIII. *È integrabile per mezzo della sostituzione qualunque prodotto differenziale, di cui un fattore è differenziale dell' altro fattore, benchè questo sia elevato a potenza.*

454. Mi propongo ora ad esaminare la formola $x^m dx(a+bx^n)^p$, nella quale suppongo p numero intero, e positivo.

Se sciolgo la potenza $(a+bx^n)^p$ ne' suoi termini, questi saranno (§.77.1) $= p+1$; e perchè il binomio è moltiplicato per $x^m dx$, sarà perciò ogni termine della potenza anche moltiplicato per $x^m dx$, formola integrabile per lo teorema fondamentale (§.445). Dunque . . . .

TEOR. CXXIX. *È integrabile sciolta ne' suoi fattori la formola differenziale $x^m dx(a+bx^n)^p$, nella quale p è un numero intero, e positivo.*

455. Nella formola antecedente $x^m dx(a+bx^n)^p$ accresco dell' unità l'esponente della variabile del fattore semplice, e sia $m+1=n$, e perciò $m=n-1$. La formola precedente dunque si trasforma in $x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$. Ma quì il fattore semplice è differenziale della variabile, ch' è nell' altro fattore elevato a potenza; dunque (§.453) è integrabile. Dunque . . . .

TEOR. CXXX. *È integrabile il prodotto differenziale di un semplice fattore per una potenza binomia, se l' esponente della variabile del semplice fattore accresciuto dell' unità pareggia l' esponente della variabile del binomio.*

456. Suppongo ora l' esponente *m* della variabile nel semplice fattore accresciuto dell' unità, il quale diviso per *n* esponente della variabile del binomio dia un numero intero, e positivo. Dunque nella formola $x^m dx$ $(a+bx^n)^p$ sarà $\frac{m+1}{n}=1$, ed $m+1=n$, ed $m=n-1$; onde la formola si trasformerà in quest'altra $x^{n-1}dx(a+bx^n)^p$; formola integrabile (§.455). Dunque . . . .

TEOR. CXXXI. *È integrabile il prodotto differenziale, di cui la variabile del semplice fattore accresciuta dell' unità nel suo esponente, sia questo esattamente divisibile dall' esponente della variabile dell' altro fattore binomio elevato a potenza.*

457. Vengo al caso pratico. Cerco $Sx^3\,dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Essendo $\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$, la formola dev' essere integrabile (§.456). Ricorro al metodo più facile, ch' è quello della sostituzione, e fo $a^2+x^2=z$; dunque $x^2=z-a^2$, ed $x=\sqrt{(z-a^2)}$; dunque $x^3=(z-a^2)\sqrt{(z-a^2)}$.

Differenzio x^2, ed ho (§.422) $2xdx=dz$, e $dx=\frac{dz}{2x}=$ . . $\frac{dz}{2\sqrt{(z-a^2)}}$; dunque $x^3\,dx=(z-a^2)\sqrt{(z-a^2)}(\frac{dz}{2\sqrt{(z-a^2)}})$, e l'intera differenziale $x^3\,dx\,(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}=(z-a^2)\sqrt{(z-a^2)}$ $\frac{dz}{2\sqrt{(z-a^2)}}\,z^{\frac{1}{3}}=(\frac{zdz-a^2dz}{2})z^{\frac{1}{3}}=$ (§.28) $\frac{z^{\frac{4}{3}}dz-a^2z^{\frac{1}{3}}dz}{2}$; e perciò $\frac{1}{2}\,S\,z^{\frac{4}{3}}dz-\frac{1}{2}\,a^2\cdot S\,z^{\frac{1}{3}}dz=$ (§.445) . . . . $\frac{\frac{1}{2}z^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}-\frac{\frac{1}{2}a^2\,z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\pm C=\frac{3z^{\frac{7}{3}}}{14}-\frac{3a^2z^{\frac{4}{3}}}{8}\pm C=$ . . . . $3z^{\frac{4}{3}}(\frac{z}{14}-\frac{a^2}{8})\pm C=\frac{3}{56}(4x^2-3a^2)\sqrt[3]{(a^2+x^2)^4}\pm C$. Ecco la formola data quantunque non sia comparsa sotto le solite forme, pure si è soggettata alla integrazione.

LEZIONE XXVIII.

Grandezze infinitesimali non Suscettibili di esatta composizione.

458. Vi è una multiplicità di casi, ne' quali le differenziali non solo non hanno la forma debita della integrazione Lez. XXIV., ma neppure a questa si possono ridurre o colla sostituzione, o colla soluzione in fattori Lez. XXVII.; per cui bisogna buttarle in serie, integrarle termine per termine, ed avere così l' integrazione approssimante. Orsìecome una frazione, o una potenza imperfetta si può buttare in serie o colla volgare divisione (§.244), o colla estrazione della radice all' Infinito (§.73),

o colla formola del binomio (§.93), o col metodo de' coefficienti indeterminati (N.247); così può gittarsi anche in serie una formola qualunque differenziale. Delle tre serie però divergente, parallela, e convergente l' ultima è al nostro caso, perchè ci fa approssimare al vero valore.

459. Mi propongo ad integrare la formola $\frac{a^3\,dx}{a^3-x^3}$, la quale non ha carattere d' integrazione algebrica. La butto in serie, ed ho $\frac{a^3}{a^3-x^3}\,dx = 1\,d\,x + \frac{x^3}{a^3}\,dx + \frac{x^6}{a^6}\,dx + \frac{x^9}{a^9}\,dx + \ldots$ ecc.; ed integrando, sarà $S\,\frac{a^3}{a^3-x^3}\,dx = x + \frac{x^4}{4a^3} + \frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^{10}}{10a^9}$ + ecc. .... $\pm C$, integrale il più prossimo al cercato (a).

460. Mi propongo ad integrare la formola $xdx(a+x)^p$, nella quale sia p un numero qualunque intero o fratto, positivo o negativo, ma sia $x > a$. Fo la potenza di $(a+x)^p$ (§.80), ed ho $a^p + p\,a^{p-1}\,x + p(\frac{p-1}{2})\,a^{p-2}x^2$ ecc.; e moltiplicandola per xdx, ed integrandola, avrò $Sxdx(a+x)^p = a^p\,\frac{x^2}{2} + pa^{p-1}\,\frac{x^3}{3}$ + ecc. ... $\pm C$, integrale il più prossimo al cercato (b).

461. Mi propongo ad integrare la formola ..... $\frac{dy}{a}\sqrt{(4y^2+a^2)} = \frac{dy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$. Butto in serie $(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}$,

(a) Questa serie è convergente fino a che $a > x$. Ma se $a < x$, in tal caso è divergente, ed inutile. Si rende però convergente se la formola si scrive in questa guisa $\frac{-a^3}{x^3-a^3}$.

(b) Se p è numero intero, e positivo, la serie contiene un numero finito di termini. Se poi è numero fratto, la serie va all' infinito, ed è integrabile, come nel §.459.

ed integrando avrò $S\frac{dy}{a}(a^2+4y^2)^{\frac{1}{2}} = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} +$ ecc. .... $\pm C$.

462. **Mi propongo ad integrare la formola** $dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Butto in serie $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed integrando avrò ...... $Sdy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{15y^7}{336}$ ecc. .... $\pm C$.

463. Mi propongo ad integrare la formola $\frac{dx}{1+x^2}$, ed avrò $S\frac{dx}{1+x^2} = Sdx(1+x^2)^{-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}$ — ecc. .... $\pm C$.

Altro metodo d' integrare per Serie.

464. RIFLETTO sulla verità stabilita nel §. 421, e vedo, che $d(xy) = xdy + ydx$; dunque $xy = Sxdy + Sydx$, e perciò $Sxdy = xy - Sydx$. Or suppongo X funzione di x, ed ho in generale $SXdx = Xx - SxdX$. Dunque ...

TEOR. CXXXII. *L' integrale della differenziale di una variabile moltiplicata per una sua funzione pareggia il prodotto della variabile nella funzione, meno l' integrale della variabile moltiplicata per la differenziale della sua funzione.*

465. Questo teorema ci conduce ad un elegante e facile metodo d' integrare per serie. Di fatto valuto $SxdX$ nella espressione del paragrafo antecedente, e per venire a capo di questo, fo $dX = X'dx$; e perciò $X' = \frac{dX}{dx}$; dunque $SxdX = SX'xdx = (§.464) \frac{X'x^2}{2} - \frac{Sx^2dX'}{2}$. Valuto $\frac{Sx^2dX'}{2}$ con fare $dX' = X''dx$, e nella stessa guisa avrò $\frac{Sx^2dX'}{2} = \frac{SX''x^2dx}{2} = \frac{x^3X''}{2\cdot 3} - \frac{Sx^3dX''}{2\cdot 3}$; e così innanzi.

Sostituisco questi valori nella formola del §.464, ed avrò $SXdx = xX - \frac{x^2}{2}X' + \frac{x^3}{2 \cdot 3}X'' - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}X''' + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}X''''$ — ecc. integrazione per serie, come si vede.

466. Or se ne' supposti valori delle successive graduazioni di X prendo, come costanti, le dx, essendo $X' = \frac{dX}{dx}$ (§.465), ed $X'' = \frac{dX'}{dx}$, saranno le loro differenziali (§.437) $dX' = \frac{d^2X}{dx}$; $dX'' = \frac{d.\,dX'}{dx} = \frac{d^3 \quad X}{(dx)(dx)} = \frac{d^3X}{dx^2}$; ..... $dX''' = \frac{d^4X}{dx^3}$ ecc.; dunque $X' = \frac{dX}{dx}$; $X'' = \frac{dX'}{dx} = \frac{d^2X}{dx^2}$; $X''' = \frac{dX''}{dx} = \frac{d^3X}{dx^3}$ ecc. Sostituisco questi valori nella formola del §.465, ed avrò $SXdx = Xx - \frac{x^2\,dX}{2dx} + \ldots\ldots \frac{x^3\,d^2X}{2 \cdot 3\,dx^2} - \frac{x^4\,d^3X}{2\,.\,3\,.\,4\,dx^3} +$ ecc. serie cercata.

467. Vengo all' applicazione dell' esposta dottrina, e cerco $S\,\frac{dx}{a+x}$. Fo $X = \frac{1}{a+x}$, differenziando, avrò $dX = \frac{-dx}{(a+x)^2}$. Divido questa espressione per dx, e sarà $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}$. Differenzio di bel nuovo l' espressione differenziata con supporre dx costante, ed ho $d^2X = \ldots\ldots - (\frac{2adx+2xdx}{(a+x)^4}) - dx = \frac{(a+x)\;2dx^2}{(a+x)^3(a+x)} = \frac{2dx^2}{(a+x)^3}$, la quale divisa per dx^2, mi dà $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}$.

Differenzio di bel nuovo d^2X, supponendo costante dx^2, ed avrò $d^3X = \frac{-(3a^2dx+6axdx+3x^2\,dx)2dx^2}{(a+x)^6} = \ldots\ldots\ldots$

$(\frac{a^2+2ax+x^2)-6dx^3}{(a+x)^4(a+x)^2} = -\frac{6dx^3}{(a+x)^4}$; e dividendo per dx^3, sarà $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{2.3}{(a+x)^4}$; e così del resto.

Or essendo $X = \frac{1}{a+x}$, sarà $S\frac{dx}{a+x} = SXdx$. Sostituisco dunque i valori trovati nella serie di sopra, ed ho $S\frac{dx}{a+x} = \text{l}(a+x) = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} \ldots \pm C$.

468. Portiamo più innanzi questa dottrina, e si cerchi l' integrazione della differenziale logaritmica $Xdx\text{l}x$. Fo $\text{l}x = y$, ed $Xdx = dz$, dunque $SXdx\text{l}x = Sydz =$ (§.464) $yz - Szdy = \text{l}xSXdx -$ (§.426) $\frac{dx}{x}SXdx$. S' integri ora Xdx, e $\frac{dx}{x}SXdx$ col metodo del §.465, e si avrà l' integrale cercato.

469. Finalmente mi propongo ad integrare una differenziale esponenziale espressa da $Sa^x dx$. Per ciò fare, riprendo la formola (§.321) $n = 1 + \frac{\text{l}n}{1} + \frac{\text{l}^2 n}{2} + \frac{\text{l}^3 n}{2.3} \ldots + \text{ecc.}$, ed in vece di n sostituisco a^x, ed ho $a^x = 1 + \frac{x\text{l}a}{1} + \frac{x^2\text{l}^2 a}{2} + \frac{x^3\text{l}^3 a}{2.3} + \text{ecc.}$ Quindi si moltiplichi questa serie per dx, e s' integri, come nel paragrafo antecedente, e si avrà l' integrale cercato.

Ecco come la semplicissima maniera di differenziare prodotti ci conduce all' elegante metodo d'integrare per serie.

470. Quì finisce l'Opera, e quì sciolgo la promessa data. Termino io di scrivere, e dà principio il Pubblico all'esame di ciò, che ho scritto. So, che il Pubblico non deve ingannarsi, e perciò non ho punto deviato da ciò, che gli ho promesso. So, che il Pubblico non inganna, e perciò son sicuro di quel retto giudizio, che all'Opera si compete.

Neque vero putandum est, integram Analysin jamdum esse inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc subsidia deesse posterorum industria detegenda.

Wolfius in Præf. ad Elem. Analy.

FINE DEL TOMO II.



REPERTORIO

DELLE LEZIONI MATEMATICHE.

SEZIONE III.

Rapporto della Grandezza discreta.

SEZIONE IV.

Applicazione dell' esposte dottrine per l' Uomo, ch' è in Società.

SEZIONE V.

La Grandezza discreta ne' suoi Infinitesimi aumenti, e decrementi.

L' ANALISTA

NEL TOMO PRIMO.



Pag.	Vers.	LEGGENDO	CORREGGA
4	1	essendo	essendosi
16	5	mauca	manca
20	11	centinaja	migliaja
20	14	estano	restano
22	4	entra	si contiene
28	5	$+ a$	$\pm a$
29	6	$4x^3$	$4x^2$
54	27	$(2x^3-4y^3)$	$(2x^3-4y^2)$
55	3	e =	$q =$
55	6	$(-4y^2)$	$(-4y^2)^2$
56	28	$2+^m m$	2^m+m
56	29	estensione	espressione
60	23	§. 78	§. 79
73	3	$(b \sqrt{cd})$	$(b+\sqrt{cd})$
99	29	del primo	nel primo
104	13	(§. 161)	(§. 160)
110	2	$\frac{x-2}{8}$	$\frac{x+2}{8}$
110	26	$24+1=8\ 42$	$24+18=42$

NEL TOMO SECONDO.

LEGGENDO			CORREGGA
Pag.	*Vers.*		
9	21	201	202
11	1	206	205
12	13	$ab=bm$	$ab=b^{2}m$
16	2	$(2-\frac{c}{d})n$	$(2-\frac{c}{d})a$
16	20	$(cd-d^{2}+\frac{1}{2}b^{2})$	$(cd-d^{2}+\frac{1}{4}b^{2})$
17	1	$\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}c$
21	10	ac^{+4}	$ae^{\ \ 4}$
25	12	$r^{m-}p$	$r^{m-1}p$
55	2	q^{-p}	q^{2-p}
56	6	390	309
57	24	$a=1+K^{v}$	$a^{v}=1+K_{v}$
74	8	misura	mistura
77	11	misure	misture
84	30	ol	lo
113	4	$(^{m}{}_{;})$	(m^{2})



